

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Fakulta stavební

Katedra stavební mechaniky

Pravděpodobnostní analýza s využitím izoparametrických
konečných prvků

Probabilistic analysis with isoparametric finite elements

Student:

Bc. Petr Lehner

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Petr Konečný, Ph.D.

Ostrava 2013

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Petr Lehner**

Studijní program: N3607 Stavební inženýrství

Studijní obor: 3607T037 Konstrukce staveb

Téma: **Pravděpodobnostní analýza s využitím izoparametrických konečných prvků**
Probabilistic analysis with isoparametric finite elements

Zásady pro vypracování:

V práci bude připraven algoritmus pro řešení difuze metodou konečných prvků. Model zvolené úlohy bude založen na izoparametrickém prvku.

Kvalita připraveného modelu bude porovnána s výsledky v software ANSYS.

Připravený model bude využit k pravděpodobnostní analýze časově závislého difuzního problému. Bude užito pravděpodobnostní citlivostní analýzy k identifikaci klíčových parametrů úlohy.

There will be prepared algorithm for the solution of diffusion using finite elements analysis. Model of selected task will be based on the isoparametric element. The quality of prepared model will be compared with results of analysis of ANSYS system.

Prepared model will be utilized for probabilistic analysis of time dependent diffusion problem. The stochastic sensitivity analysis will be applied in order to evaluate the sensitivity of input parameters.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] KOLÁŘ, V., KRATOCHVÍL, J., LEITNER, F., ŽENÍČEK, A. Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL, Praha, 1979
- [2] KONEČNÝ, P.: Reliability of Reinforced Concrete Bridge Decks with Respect to Ingress of Chlorides, Doktorská disertační práce Fakulta stavební, VŠB – TU Ostrava, Ostrava Numerical solution of 2-D chloride diffusion problem using FEA, 2007.
- [3] LEHNER, P. Numerické řešení 2D difuze s využitím MKP, bakalářská práce, Fakulta stavební VŠB-TUO, 2012.
- [4] MAREK P., Guštar M., Anagnos T.: Simulation-based Reliability Assessment, CRC Press, Inc., Boca Raton 1996
- [5] TEPLÝ B., NOVÁK D.: Spolehlivost stavebních konstrukcí, CERM, s.r.o. Brno, 1999
- [6] TEPLÝ, B., ŠMIŘÁK, S.: Pružnost a plasticita II, VUT v Brně, 1992

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Petr Konečný, Ph.D.**

Datum zadání: 28.02.2013

Datum odevzdání: 02.12.2013



doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. Ing. Darja Kubečková, Ph.D.
děkanka fakulty

Prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě.....

.....

podpis studenta

Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. - autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k presenčnímu nahlédnutí. Souhlasím s tím, že údaje o bakalářské práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č.111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě.....

.....

podpis studenta

Anotace

Předložená diplomová práce je zaměřena na rozvíjení algoritmu pro řešení difuze chloridových iontů metodou konečných prvků. V práci je uvažováno s modelem založeným na izoparametrickém prvku. Algoritmus je implementován do prostředí programu MatLab a výsledky z vytvořeného programu jsou porovnány s výsledky ze softwaru Ansys. Připravený program je dále použit při pravděpodobnostní analýze časově závislého difuzního problému.

Trvanlivost železobetonových mostovek je dlouhodobě ohrožena působením posypových solí na povrchu, jejichž chloridové ionty pronikají do konstrukce. Při následném kontaktu s ocelovou výztuží způsobují korozi, která má negativní vliv právě na životnost. Vytvořený model konkrétně popisuje pronikání chloridových iontů do železobetonových mostovek bez ochrany výztuže, neboť cílem je ověřit chování modelu při uvažování časově závislého difuzního součinitele.

Upravený algoritmus nově dovoluje užití konstantního nebo časově závislého parametru a následně využití při pravděpodobnostní analýze. Uvedeny jsou čtyři příklady s různými přístupy k difuznímu součiniteli. V závěru práce jsou porovnány výsledky pravděpodobnostních úloh a je užito citlivostní analýzy k identifikaci klíčových parametrů.

Klíčová slova

Difuze chloridů, nestacionární úloha, algoritmus, MKP, beton, výztuž, difuzní součinitel.

Annotation

The master thesis is focused on developing of an algorithm for the solution of diffusion chloride ions using finite element method. This work describes the model based on isoparametric element. The algorithm is implemented under MatLab software. Generated results are compared with results from commercial Finite Element software Ansys. Prepared program is used in probabilistic analysis of time-dependent diffusion problem.

Effect of deicing salts is one of the significant factors causing a corrosion of steel reinforcement of concrete bridges. Corrosion threatens the structural lifetime. The created model describes the penetration of chloride ions to the reinforced concrete bridge deck without protection of the steel reinforcement, because the objective is to verify the behavior of the model when considering the time-dependent diffusion coefficient.

The entire computer algorithm is used in the probability analysis. There are four examples with different diffusion coefficient. Results of probabilistic problems are compared and there is used sensitivity analysis to identify key parameters.

Keywords

Chloride diffusion, non-stationary, algorithm, FEM, concrete, corrosion, reinforcement, diffusion coefficient.

Obsah diplomové práce

Seznam použitého značení.....	- 10 -
1. Úvod.....	- 12 -
1.1. Trvanlivost železobetonových mostovek	- 12 -
1.2. Metoda konečných prvků a izoparametrický konečný prvek	- 14 -
1.3. Časově závislý difuzní součinitel.....	- 15 -
1.4. Pravděpodobnostní analýza	- 15 -
1.5. Návaznost na předchozí práce.....	- 16 -
2. Cíle diplomové práce	- 18 -
2.1. Rozsah diplomové práce.....	- 18 -
3. Izoparametrický konečný prvek.....	- 20 -
3.1. Výběr prvku	- 21 -
3.2. Popis trojúhelníkového prvku	- 22 -
3.3. Řešený příklad.....	- 24 -
4. Časově závislý difuzní součinitel.....	- 27 -
4.1. Difuzní proces	- 27 -
4.2. Vývoj difuzního součinitele v čase	- 28 -
4.3. Algoritmus časově závislého difuzního součinitele	- 29 -
4.4. Porovnání s laboratorními výsledky	- 30 -
4.5. Aplikace algoritmu do výpočetního programu	- 32 -
4.6. Řešený příklad.....	- 32 -
5. Pravděpodobnostní analýza	- 36 -
5.1. Hlavní algoritmus.....	- 36 -
5.2. Podpůrné algoritmy	- 38 -
5.3. Vstupní parametry	- 39 -

6.	Výsledky analýzy příkladu	- 41 -
6.1.	Pravděpodobnost inicializace koroze příkladu A1	- 41 -
6.2.	Citlivostní analýza příkladu A1	- 43 -
7.	Porovnání výsledků úloh	- 45 -
7.1.	Porovnání pravděpodobností inicializace koroze.....	- 45 -
7.2.	Porovnání v rámci citlivostní analýzy	- 48 -
8.	Souhrn	- 50 -
9.	Závěry.....	- 52 -
10.	Seznam použitých pramenů a literatury	- 54 -
11.	Přílohy	- 58 -
	Poděkování.....	- 66 -

Seznam použitého značení

C	matice kapacity
C_0	efektivní (počáteční) koncentrace rozpustitelných chloridových iontů [%] na povrchu konstrukce
C_i	koncentrace chloridových iontů na pozadí konstrukce [%]
C_{th}	limitní koncentrace chloridových iontů (chloridový práh) [%]
$C_{z,t}$	koncentrace chloridových iontů [%] v hloubce Z [m] v čase t [s]
D_c	difuzní součinitel chloridových iontů v betonu [m^2s^{-1}]
$D_{c,(t)}$	časově závislý difuzní součinitel betonu [m^2s^{-1}]
$D_{c,ref}$	referenční (počáteční) difuzní součinitel betonu [m^2s^{-1}]
FA	množství popílku ve směsi (z anglického fly ash) [%]
J	Jakobian transformačních matic
K	matice vodivosti
N	interpolační básová funkce
P_{ft}	pravděpodobnost započetí koroze [%] v čase t [s]
SG	množství strusky ve směsi (z anglického slag) [%]
Z	tloušťka betonového krytí výztuže [m]
a	plocha konečného prvku [m^2]
b	šířka výřezu desky železobetonové mostovky [m]
h	tloušťka desky železobetonové mostovky [m]
m	materiálová konstanta [-]
q_x	teplo vstupující do prvku na okraji x [W/m^2]
q_z	teplo vstupující do prvku na okraji z [W/m^2]
t	čas [s]
t_{ref}	referenční čas pro časovou úlohu difuze [dny]

Řecké symboly

η	souřadnice referenčního obrazce izoparametrického prvku
ξ	souřadnice referenčního obrazce izoparametrického prvku

Ostatní symboly

$\frac{\partial ()}{\partial t}$ parciální derivace podle času t

$\frac{\partial ()}{\partial x}$ parciální derivace podle x

$\frac{\partial ()}{\partial z}$ parciální derivace podle z

$\frac{\partial ()}{\partial \eta}$ parciální derivace podle η

$\frac{\partial ()}{\partial \xi}$ parciální derivace podle ξ

$\det ()$ determinant

1. Úvod

V dnešní době je velice důležitá otázka udržitelnosti a ekologie. Ve stavebnictví jsou tato témata nadmíru aktuální a vytvářejí poptávku po nových nápadech a výzkumných cílech. S udržitelností a ekologií souvisí i snaha o ekonomicky výhodné projektování veřejných zakázek. Současná legislativa zabývající se navrhováním železobetonových konstrukcí se více soustředí na uplatnění konkrétních předpřipravených postupů a zanedbává možnost využití pravděpodobnostního posudku [18], [19], [24]. Naopak mezi odborníky se rozšiřuje názor, že je třeba využít návrhy zohledňující spolehlivost, životnost, ekonomický efekt a environmentální vlivy.

Při přenesení těchto požadavků na konkrétní konstrukce, např. železobetonové mosty, se dá říci, že cílem je navrhnout takovou konstrukci, která bude ekologická, finančně přívětivá a hlavně bude navržena s ohledem na dlouhou životnost. O to se snaží i přístup nazvaný Performance-Based Design, který lze volně přeložit jako Posouzení spolehlivosti s ohledem na vlastnosti [25], [24]. Tato relativně nová cesta při navrhování konstrukcí se jeví jako velice výhodná právě s ohledem na výše popsané požadavky.

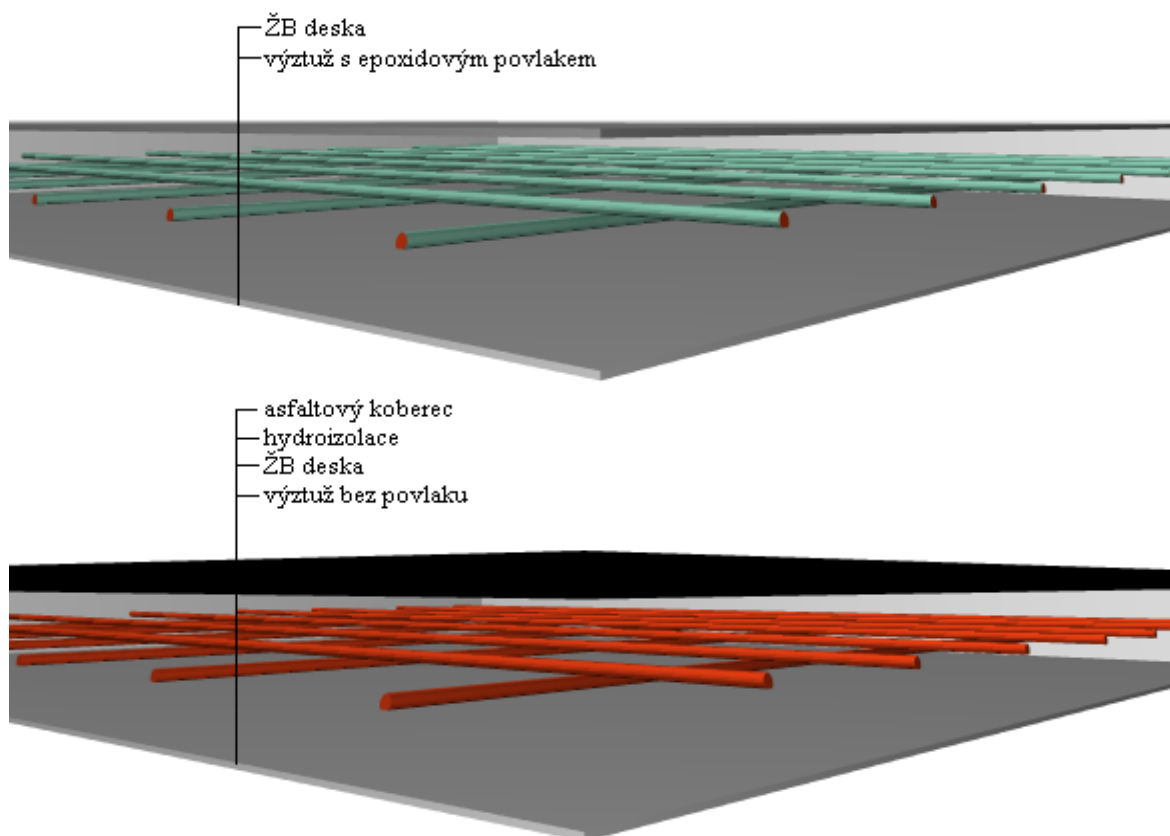
1.1. Trvanlivost železobetonových mostovek

Spolehlivost železobetonových konstrukcí ovlivňuje mnoho faktorů. Většina z nich zapříčiňuje nutnost rekonstrukce nebo výměny určitých prvků konstrukce. V konečném důsledku je zkrácená životnost důvodem ke zvýšení celkových nákladů, což je právě faktor, kterému se snažíme zabránit. Logicky lze usoudit, že správné pochopení degračních procesů a s tím spojené teoretické prodloužení životnosti, vede k určitému přívětivému vlivu na ekonomii stavby a snížení zátěže na veřejné rozpočty [10]. I když se problematikou modelování degračních procesů vědecká a inženýrská komunita zabývá řadu let, stále je zde spousta problémů a úloh, které je třeba důkladně a dlouhodobě prozkoumat.

Jedním z konkrétních příkladů může být již zmíněná trvanlivost železobetonových mostů. Ta může být závislá na mnoha faktorech. Například na působení zásad a kyselin, opakované změně vlhkosti a teplot, karbonataci betonu, působení posypových solí a UV záření, únavou a

dalšími vlivy. Významným faktorem je působení posypových solí, konkrétně jejich pronikání skrz krytí k ocelové výztuži. Proces difuze chloridových iontů obsažených v solích je hlavním důvodem koroze výztuže a následné snížení trvanlivosti mostu [16], [10]. Tento fakt má přímý vliv na náklady spojené s opravami mostů, případně s nutností celkové výměny konstrukce. Modely, které vhodně popisují tento proces, mají významný dopad na správný návrh s ohledem na materiál a realizaci daného objektu.

Jak je uvedeno v práci *Numerické řešení 2D difuze chloridů pomocí MKP* [16], v Evropě a ve Spojených Státech Amerických existují dva rozdílné pohledy na ochranu železobetonových mostovek. Na obrázku 1.1 [16] je vidět porovnání dvou řezů konstrukce. V prvním případě se jedná o řez mostovkou typickou pro Severní Ameriku, kde je chráněna přímo ocelová výztuž epoxidovou pryskyřicí. Druhá část obrázku 1.1 ukazuje, že v Evropě se naopak používá ochrana celé mostovky pomocí hydroizolační asfaltové vrstvy. Diplomová práce se blíže ochranou nezabývá, protože se soustředí hlavně na užití časově závislého difuzního součinitele. V úvodu je tento aspekt uveden pouze z ohledu na úplnost popisu dané problematiky.



Obr. 1.1 Rozdíly v ochraně železobetonových mostovek v USA (nahore) a v Evropě (dole)

1.2. Metoda konečných prvků a izoparametrický konečný prvek

Metoda konečných prvků neboli MKP (angl.. Finite Element Method - FEM) je obecná numerická metoda, která vznikla v 50. letech minulého století. Běžně se využívá v problémech stavební mechaniky, při modelování proudění kapalin, pro úlohy vedení tepla, či elektromagnetických polí. Její nespornou výhodou je univerzálnost a možnost aplikace na problémy, které jsou pro jiné metody nevhodné. Naopak nevýhodou je nutnost použití výpočetní techniky na jakoukoli úlohu a v případě složitějších zadání i značná výpočetní náročnost [5].

V dnešní době je však hardwarové zázemí na takové úrovni, že se dají počítat složité příklady s velkým počtem vstupních parametrů. Vše závisí na správné přípravě algoritmu pro výpočet, který musí být optimalizovaný na danou úlohu.

Výpočet MKP se dá velice zjednodušeně rozdělit do několika fází, které jsou u každé úlohy podobné:

- určení typu problému a vhodná volba konečného prvku,
- aplikace známého konečného prvku nebo případné odvození,
- analýza konečného prvku,
- výpočet hledaných hodnot.

Zmíněné využití výpočetní techniky umožňuje výpočet za pomoci velkého množství konečných prvků. Samotná volba konečného prvku je velice důležitá a v mnoha úlohách se ukazuje, že je výhodné využití izoparametrického konečného prvku. Takový prvek se dá použít nejen na složitější problémy, ale hlavně na úlohy, u kterých je vyžadována větší přesnost [5].

Použití trojúhelníkového lineárního konečného prvku při malém rozměru umožňuje pokrytí oblasti kolem okrajů nepravidelné konstrukce, ale přesnost výpočtu je závislá právě na počtu prvků. V rámci diplomové práce bylo nutno zhodnotit, jaké změny může přinést použití trojzlového nebo čtyřzlového izoparametrického prvku. Základním parametrem pro hodnocení byla časová náročnost odvození v poměru s přímým přínosem v zadané úloze. V diplomové práci jsou dále uvedeny důvody pro využití zvoleného prvku a jeho význam ve výpočetním programu.

1.3. Časově závislý difuzní součinitel

Jedna z částí diplomové práce se blíže soustředí na různé přístupy zahrnutí difuzního součinitele do výpočtu. Tato materiálová charakteristika je významně ovlivňována reálným efektem dlouhodobého zrání betonu [2]. Při snaze o posun uvažovaného modelu blíže k realitě, je výhodné místo původně uvažovaného konstantního difuzního součinitele [16] použít časově závislý.

Samotná proměnlivost difuzního parametru v čase může významně ovlivňovat průběh difuzního procesu v konstrukci, a to zejména v případě použití vysokopevnostního betonu [15]. Různé přístupy k dané problematice přinášejí spoustu otázek hlavně s ohledem na různé příměsi nebo jejich procentuální zastoupení v betonu. Diplomová práce se zabývá zhodnocením nastolených otázek, zvláště porovnáním různých směsí.

1.4. Pravděpodobnostní analýza

Skloubení algoritmu využívajícího pro výpočet izoparametrický konečný prvek s časově závislým difuzním součinitelem je vhodné pro následnou pravděpodobnostní analýzu celého difuzního problému.

K samotné analýze lze využít jednu z pravděpodobnostních metod, jako je například SBRA – Simulation-Based Reliability Assessment [17], IS – Importance Sampling [21], LHS – Latin Hypercube Sampling [29] nebo POPV – Přímý Optimalizovaný Pravděpodobnostní Výpočet [9]. SBRA a LHS vychází z principu metody Monte Carlo vyvíjené od 30. let 20. století. Monte Carlo má nevýhodu v tom, že je zde využití velké množství vstupních náhodných proměnných, což vede ke zvyšování náročnosti výpočtu. Metoda SBRA [17] využívá princip náhodnosti Monte Carla a zavádí jako veličiny předem známé hodnoty reprezentované histogramy. Spolehlivost daného jevu je následně vyjádřena porovnáním vypočtené pravděpodobnosti poruchy a normové návrhové pravděpodobnosti poruchy [14].

Oproti tomu metoda LHS využívá výběr reprezentativních vstupních hodnot pomocí vhodného rozdělení distribuční funkce. K efektivnímu odhadu statistik a následné aproximaci funkce spolehlivosti potřebuje menší počet opakování než metoda Monte Carlo [14]. Třetí z výše

uvedených metod, POPV, nepatří mezi simulační, ale mezi numerické metody. Je vhodná pro velké množství úloh a výsledný odhad pravděpodobnosti je zatížen pouze numerickou chybou. Ta je způsobena diskretizací vstupních a výstupních veličin. Při stejných vstupních hodnotách a parametrech výpočtu, je výsledek POPV pokaždé stejný. Podobnost se simulačními metodami spočívá v zadávání vstupních náhodných veličin pomocí histogramů. Počet matematických operací pro řešení numerického integrálu funkce spolehlivosti závisí na počtu náhodně proměnných a na jejich dělení neboli na počtu tříd. Počet operací může být výrazně redukován pomocí optimalizačních technik, které při zachování dostatečné přesnosti snižují výpočetní nároky [14].

1.5. Návaznost na předchozí práce

Jednu z prvních aplikací metody SBRA na problém trvanlivosti železobetonových mostovek uvedli ve své práci Jan Bradáč a Pavel Marek [16], a to v souvislosti s karbonatací betonu. Následně byla problematika rozšířena o další aspekty ovlivňující danou úlohu a o 2D model konstrukce týmem kolem profesora Tikalského [26].

2D model v kombinaci s pravděpodobnostním posudkem má své opodstatnění při zohlednění vlivu trhliny v krytí výztuže, která může vést k rychlejšímu pronikání chloridových iontů k výztuži [13], [28]. Dále bylo poukázáno na to, že je třeba brát v potaz například množství chloridových iontů, vlhkost, případně množství kyslíku na úrovni výztuže, protože vše může ovlivňovat proces vzniku koroze a tím negativně působit na trvanlivost konstrukce. Samotná koroze může navyšovat objem materiálu v daném místě a tím způsobuje vznik dalších trhlin v betonovém krytí [11].

Disertační práce *Posuzování spolehlivosti železobetonové mostovky s ohledem k působení chloridů* doktora Petra Konečného [5] mimo jiné poukazovala na vhodnost využití metody SBRA a MKP modelu při posudku spolehlivosti konstrukce železobetonové mostovky a její výztuže. Autor v závěru navrhl několik možných cest v dalším výzkumu.

Bakalářská práce nazvaná *Numerické řešení 2D difuze chloridů pomocí MKP* [16] se, jak název napovídá, zabývala právě problematikou difuzního procesu u železobetonových mostů. Práce popisovala algoritmus pro výpočet nelineární difuze s využitím časové diskretizace.

Byl využit dvourozměrný lineární trojúhelníkový konečný prvek, který byl odvozen dle teplotně-difuzní analogie. Vzhledem k tomu, že byla uspokojivými výsledky dokázaná funkčnost odvozeného algoritmu, bylo navrženo použití vytvořeného programu pro další bádání.

Celý algoritmus byl implementován do programovacího prostředí MatLab [20] a nově vytvořený program byl koncipován pro uživatele se znalostmi problematiky. V první fázi se výsledky programu porovnaly s numerickým výpočtem pomocí 1D rovnice vyjadřující 2. Fickův zákon. Dále byl algoritmus podroben porovnání s výsledky z komerčního softwaru Ansys [1]. Užilo se 2D modelu železobetonové mostovky s uvažováním trhliny a výsledky vykazovaly uspokojivou míru podobnosti. Nepatrné rozdíly byly přisuzovány využitím rozdílných konečných prvků. Algoritmus následně implementoval docent Jiří Brožovský do programu uFem [4].

V návaznosti na předchozí práce vyvstalo mnoho nových otázek a cest, kterými se mohl výzkum problematiky vydat. Šlo například o možnost využití jiného konečného prvku, rozšíření programového prostředí o nové moduly, zjednodušení a optimalizace algoritmu s ohledem na menší výpočetní náročnost, zavedení dalších vstupních parametrů, zakomponování algoritmu do programu pro pravděpodobnostní analýzu úlohy difuze chloridových iontů a další.

2. Cíle diplomové práce

Vzhledem k široké škále možných variant problému byly pro diplomovou práci vybrány tři hlavní body, které měly v konečném důsledku tvořit komplexní úlohu. Cílem je úprava původního algoritmu pro řešení 2D difuze [16] s ohledem na možnou změnu typu konečného prvku, dále úprava pro užití časově závislého difuzního součinitele a následná aplikace algoritmu v pravděpodobnostní analýze spolehlivosti. Pro lepší přehlednost byl plán práce rozdělen na tyto čtyři body:

- a) Prvním krokem bylo zhodnocení využitelnosti trojuzlového izoparametrického prvku, který byl již odvozen v předchozí bakalářské práci [16]. Bylo navrženo vyhodnocení přínosu odvození jiného prvku z pohledu časové náročnosti v rámci dané úlohy. Jeden z prvků byl následně zaveden do výpočetního algoritmu a výsledky byly porovnány s komerčním softwarem.
- b) Další fáze práce se zaměřila na časovou závislost jednoho ze vstupních parametrů, konkrétně šlo o difuzní součinitel. Důraz byl kladen na faktory ovlivňující jeho hodnotu a následně i zhodnocení vlivu na výsledky uvažovaných úloh.
- c) Třetí úkol spočíval ve vytvoření pravděpodobnostního algoritmu, který zavádí do výpočetního programu náhodné vstupní veličiny dle dostupných dat z histogramů.
- d) Poslední fází přípravy diplomové práce bylo sjednocení všech algoritmů do jednoho funkčního a komplexního systému. Cílem byla pravděpodobnostní analýza časově závislého difuzního problému. Současně s tím souvisí i citlivostní analýza klíčových vstupních parametrů a zhodnocení úlohy.

2.1. Rozsah diplomové práce

Z popsaných cílů vychází i konkrétní rozsah předkládané práce. *Úvodní kapitola* přináší zevrubný pohled na problematiku trvanlivosti železobetonových konstrukcí a její význam z hlediska udržitelnosti a ekologie. Další části úvodní kapitoly přinášejí krátké popisy

jednotlivých částí problematiky, mimo jiné nástin časově závislého difuzního součinitele, izoparametrického prvku nebo pravděpodobnostní analýzy.

3. kapitola nazvaná *Izoparemetrický konečný prvek* navazuje na úvodní slova a přibližuje problematiku a význam využití izoparametrického prvku při výpočtu MKP. Jsou zde uvedeny jeho výhody a nevýhody a rozdíly oproti ostatním prvkům. Jsou uvedeny i důvody pro využití prvku odvozeného v předchozí práci [16]. Kapitola končí řešeným příkladem, který ukazuje porovnání výsledků vytvořeného programu a komerčního softwaru.

Další částí diplomové práce je kapitola 4. *Časově závislý difuzní součinitel*. Zde jsou uvedeny základní informace o různých přístupech k problematice této materiálové charakteristiky. Tato fáze se soustředí na pochopení dané úlohy, poukazuje na vliv různých vstupních materiálů na difuzní součinitel a předvádí konkrétní výpočet hodnot pro porovnávací úlohy. Vzhledem k tomu, že původní algoritmus [16] využíval konstantní parametr, jsou zde popsány rozdíly při aplikaci odlišných přístupů.

Kapitola 5. *Pravděpodobnostní analýza*, popisuje proces vytváření řídicího algoritmu pro zavádění náhodných vstupních veličin. Tato část práce se zaměřuje na další podpůrné programy, které byly vytvořeny v rámci přípravy. Kapitola obsahuje popis parametrů vstupujících do čtyř řešených úloh. Následná kapitola 6. *Výsledky analýzy příkladu* ukazuje grafické i textové výstupy jednoho z řešených příkladů. Ten je zde podrobně popsán a je uvedena citlivostní analýza časově závislého difuzního problému.

Další kapitola 7. nazvaná *Porovnání výsledků úloh* se soustředí na všechny uvažované příklady a poukazuje na jejich rozdíly. Ty jsou prokázány jak textovými hodnotami, tak grafickým porovnáním.

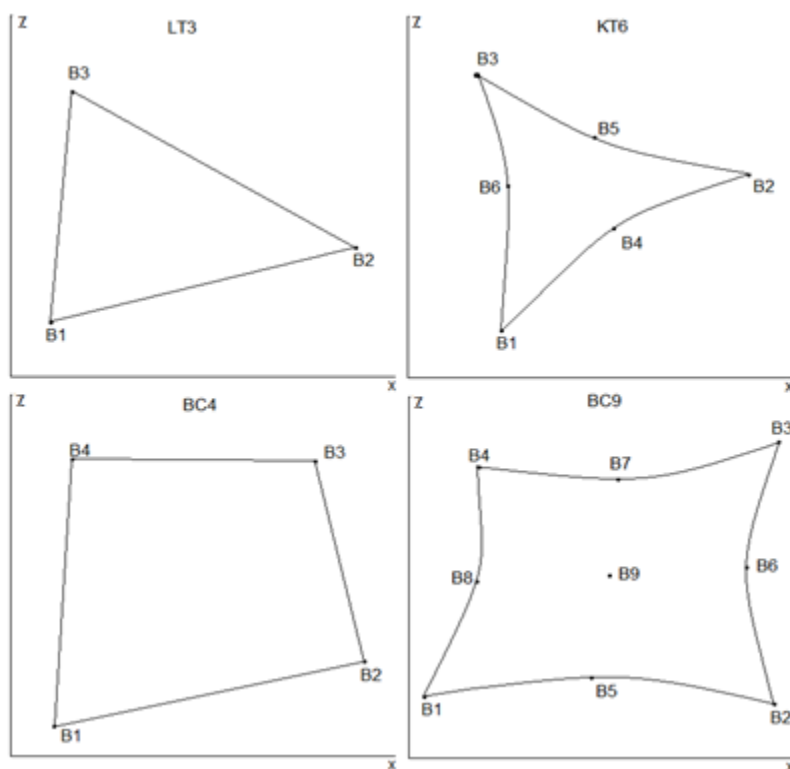
Závěr práce popisuje stav řešené úlohy, nové poznatky, vyvstalé problémy a možné budoucí směřování výzkumu. Diplomová práce následně obsahuje seznam použitých pramenů a literatury.

Příloha na konci práce obsahuje popis odvození čtyřuzlového izoparametrického prvku a zdrojový kód implementovaného algoritmu. CD-ROM přiložený k diplomové práci obsahuje funkční verze všech programů, elektronickou kopii diplomové práce a další grafické výstupy.

3. Izoparametrický konečný prvek

První část diplomové práce se zaměřuje na zhodnocení použitelnosti určitého typu izoparametrického konečného prvku. V bakalářské práci [16] byl jako prvek využíván pravoúhlý trojúhelníkový prvek, který měl výhodu v relativní jednoduchosti odvození a přípravě algoritmu. S ohledem na požadavek zpřesnění výsledků výpočtů bylo navrženo zhodnocení využití jiného izoparametrického prvku.

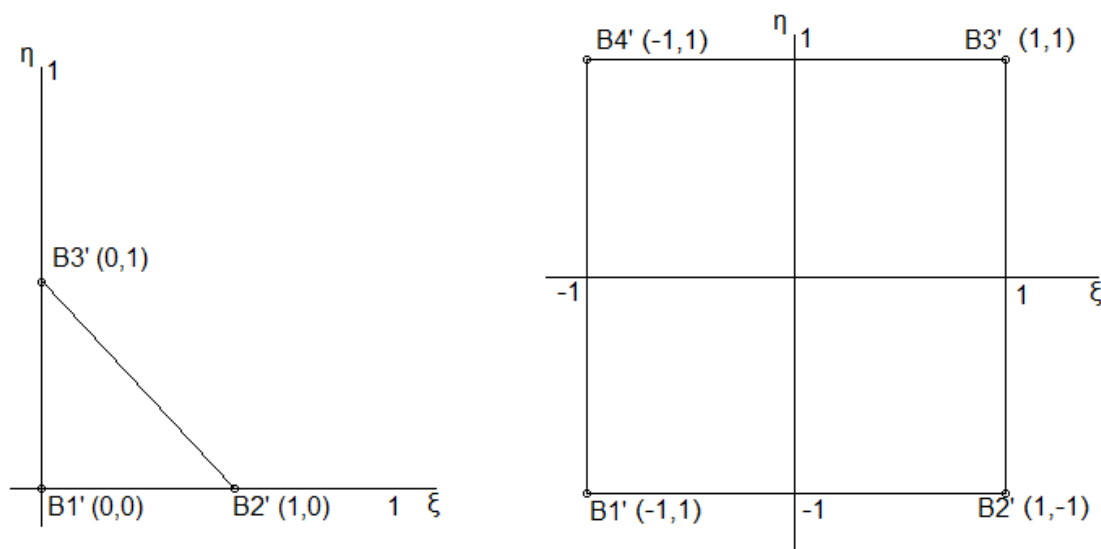
Proces odvozování a analýza konečného izoparametrického prvku probíhá na jednotkovém obrazci v souřadnicové soustavě η, ζ . Pomocí zvolených tvarových funkcí se následně referenční prvek zobrazí na skutečný prvek, pro přehlednost v souřadnicové soustavě x, z . Funkce zobrazení jsou využity jako aproximace hledaných veličin. Existuje několik typů izoparametrických prvků. Jejichž příklady jsou uvedeny na obrázku 3.1 [6]. Jedná se o lineární trojúhelníkový prvek s třemi uzly označený LT3, kvadratický trojúhelníkový prvek s šesti uzly KT6, bilineární čtyřúhelníkový prvek se čtyřmi uzly BC4 a úplný bikvadratický čtyřúhelníkový prvek s devíti uzly BC9.



Obr. 3.1 Příklady typů izoparametrických prvků

3.1. Výběr prvku

Před započítím samotného vytváření algoritmu pro pravděpodobnostní analýzu difuzní úlohy bylo nutno zhodnotit, jak velký význam má využití složitějšího izoparametrického prvku s ohledem na náročnost jeho odvození. Možností bylo několik, ale v rámci kontinuity pracovního procesu byl zkoumán bilineární čtyřuzlový izoparametrický prvek BC4 (obrázek 1.2 a 3.1). Takový prvek má strany přímé a je k němu přiřazen referenční prvek, který má tvar čtverce a je uveden na obrázku 3.2. Na tomto referenčním prvku se definují bazové funkce N .



Obr. 3.2 Referenční prvek pro LT3 a BC4

V rámci diplomové práce proběhl s doc. Ing. Jiřím Brožovským, Ph.D. pokus o odvození čtyřuzlového prvku BC4 na difuzní úloze. Časová i technická náročnost odvození se však ukázala jako problém. Vytvořený algoritmus totiž nevykazoval očekávané výsledky a vzhledem k tomu, že další úkoly, tedy zavedení časově závislého difuzního součinitele a pravděpodobnostní analýza, měly větší význam, bylo rozhodnuto o využití původního trojuzlového prvku.

V příloze A na konci diplomové práce je uveden popis odvození čtyřuzlového izoparametrického prvku BC4 společně s opisem zdrojového kódu algoritmu vytvořeného v prostředí programu MatLab. Při budoucím výzkumu je možno navázat na daný popis odvození a případně využít opravený funkční algoritmus pro další difuzní úlohy.

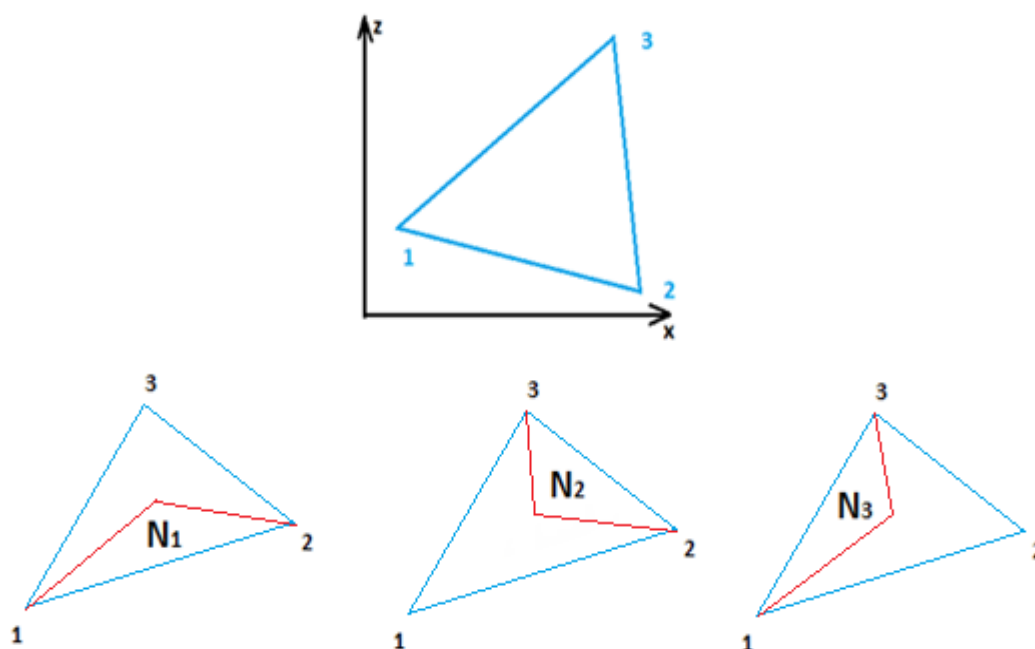
3.2. Popis trojúhelníkového prvku

Tato podkapitola celkově vychází z informací obsažených v bakalářské práci *Numerické řešení 2D difuze chloridů pomocí MKP* [16]. Prvek byl odvozen v rámci teplotně-difuzní analogie, ale v předložené práci je uveden postup aplikovaný přímo na difuzní problém.

Prvním krokem pro odvození trojúhelníkového izoparametrického prvku na difuzní úloze je určení bazových interpolačních funkcí N . Ty vycházejí z takzvaných plošných souřadnic a využívají poměru mezi celkovou plochou prvku a a plochou jedné třetiny prvku a_i :

$$N_1 = \frac{a_1}{a}, \quad N_2 = \frac{a_2}{a}, \quad N_3 = \frac{a_3}{a}. \quad /3.1/$$

Na obrázku 3.3 je prvek LC3 a grafické vyjádření plošných souřadnic N_i .



Obr. 3.3 Trojúhelníkový izoparametrický prvek a jeho bazové funkce

Vzhledem k tomu, že do úlohy vstupuje prvek v kartézských souřadnicích, je nutno určit transformační rovnice:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad /3.2/$$

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 \quad /3.3/$$

Inverzí rovnic /3.4/ a /3.9/ pak získáme maticový zápis pro výpočet plošných souřadnic:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} x_2 z_3 - x_3 z_2 & z_2 - z_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 z_1 - x_1 z_3 & z_3 - z_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 z_2 - x_2 z_1 & z_1 - z_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad /3.4/$$

V rovnici /3.4/ se vyskytuje plocha prvku a . Dále bylo nutno vyjádřit koncentrace chloridových iontů C pomocí aproximačních funkcí:

$$C = N_1 C_1 + N_2 C_2 + N_3 C_3, \quad /3.5/$$

kde N_i jsou funkce popsané ve vzorcích /3.1/ a C_i jsou hledané koncentrace v jednotlivých uzlech. Maticově lze výraz /3.2/ zapsat jako:

$$\{C\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}. \quad /3.6/$$

Následně bylo nutno vyjádřit gradienty bázevých funkcí B , které jsou po prvku konstantní. Ty jsou vyjádřeny derivací bázevých funkcí a jejich rovnice vypadá v maticové podobě takto:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} z_{23} & z_{31} & z_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \quad /3.7/$$

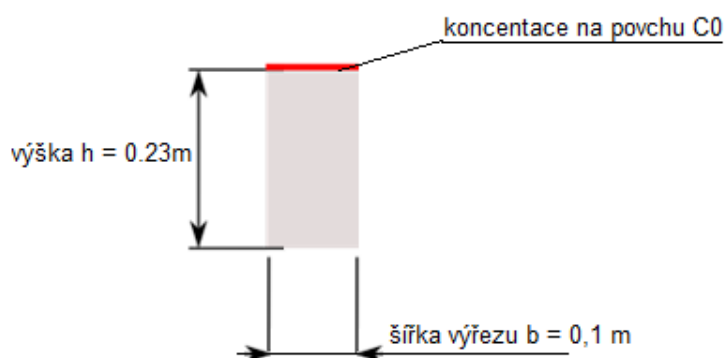
Posledním krokem tzv. analýzy konečného prvku bylo odvození matice vodivosti, která je v klasických úlohách teorie pružnosti analogická k matici tuhosti, a proto je označována písmenem K . Pro nelineární difuzní úlohy je navíc třeba odvodit i matici kapacity C . V práci *Numerické řešení 2D difuze chloridů pomocí MKP* [16], byly obě matice odvozeny pro pravoúhlý trojúhelníkový prvek a měly tento tvar:

$$K = \int_V B^T D_c B dV = AB^T D_c B, \quad /3.8/$$

$$C = \int_V N^T N dV = AN^T N, \quad /3.9/$$

3.3. Řešený příklad

I když byl v rámci diplomové práce brán hlavní zřetel na implementaci časově závislého difuzního součinitele a pravděpodobnostní analýzu, které jsou popsány v dalších kapitolách, bylo nutno zkontrolovat již vytvořený algoritmus před dalšími úpravami. Pro tento úkol byl zvolen model železobetonové mostovky bez použití hydroizolační vrstvy, tedy typ využívaný převážně v USA. Vzhledem k tomu, že v dané úloze je zkoumáno 1D chování na 2D modelu, bylo možno využít 0,1 m široký výřez mostovky dle obrázku 3.4:



Obr. 3.4 Schéma výřezu ŽB mostovky

Do vytvořeného výpočetního programu a do komerčního softwaru Ansys [1] byly zavedeny konkrétní hodnoty, které jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Tabulka 3.1 Vstupní hodnoty řešeného příkladu

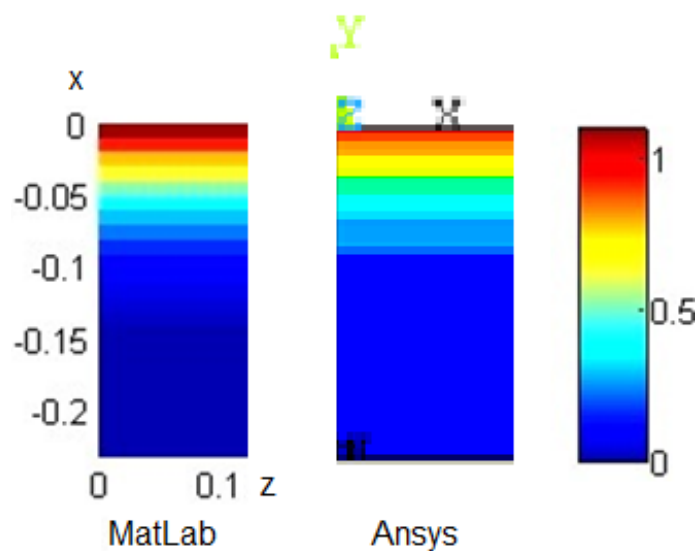
Parametr	Hodnota
Tloušťka desky h	0,23 m
Šířka výřezu desky b	0,1 m
Difuzní součinitel D_c	$4,91 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Koncentrace na povrchu C_0	1,1 %
Počet dělení na tloušťku	23
Počet dělení na šířku	10
Souřadnice hledaného bodu $[x; z]$	$[0,05; 0,10] \text{ m}$

Výstupem z obou programů byly výsledné koncentrace v konkrétním bodě se souřadnicemi uvedenými v tabulce 3.1. Bylo uvažováno s hodnotami z deseti časových období, konkrétně šlo o 10, 20, 30, 40 a 50 let po začátku působení chloridových iontů. V tabulce označené číslem 3.2 jsou uvedeny výsledné hodnoty, které byly získány z obou výpočetních modelů.

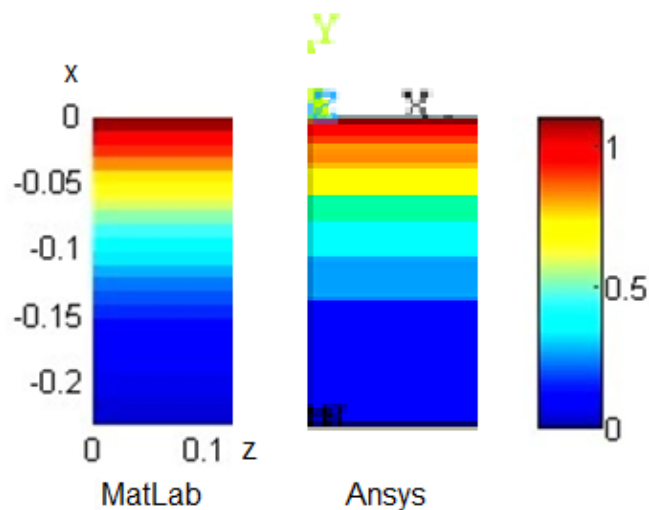
Tabulka 3.2 Porovnání výsledků koncentrace chloridových iontů v % z programu vytvořeném v MatLabu a ze softwaru Ansys

<i>Roky od počátku působení chloridů</i>					
Program	<i>10</i>	<i>20</i>	<i>30</i>	<i>40</i>	<i>50</i>
Ansys	0,0778	0,2309	0,3294	0,4070	0,4680
MatLab	0,0775	0,2207	0,3267	0,4048	0,4667

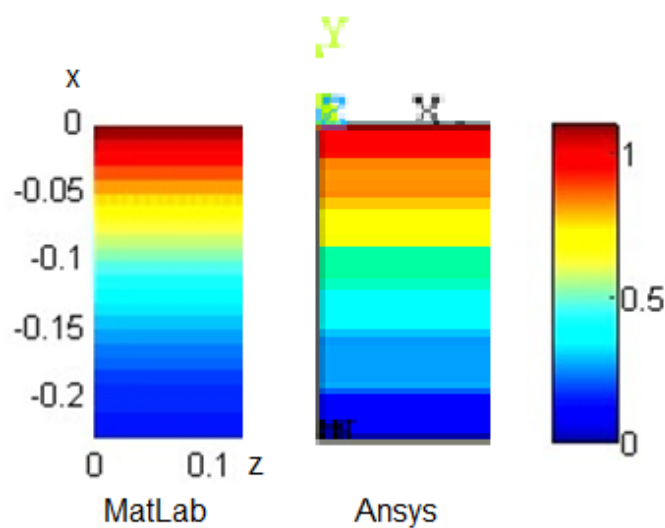
Dále jsou zde uvedeny grafické výstupy z obou programů. Na obrázku 3.5 je koncentrace chloridových iontů po 10 letech, na obrázku 3.6 po 30 letech a hodnoty po 50 letech jsou na obrázku 3.7. Barevná škála na pravé straně obrázků udává hodnotu koncentrace v %.



Obr. 3.5 Koncentrace po 10 letech z modelu v MatLabu (vlevo) a z Ansysu (uprostřed)



Obr. 3.6 Koncentrace po 30 letech z modelu v MatLabu (vlevo) a z Ansysu (uprostřed)



Obr. 3.7 Koncentrace po 50 letech z modelu v MatLabu (vlevo) a z Ansysu (uprostřed)

Na uvedeném příkladu byla dokázána funkčnost výpočetního algoritmu využívajícího 2D MKP model difuze. Vzhledem k tomu bylo možno pokračovat v práci a zkoumat časově závislý difuzní součinitel.

4. Časově závislý difuzní součinitel

Jak již bylo řečeno v úvodu práce, podrobnější výzkum v oblasti časové závislosti difuzního součinitele je velice žádoucí. Tento parametr v úloze zastupuje materiálové vlastnosti, a proto může teoreticky významně ovlivňovat výsledky. V předchozím případě [16] bylo při vytváření výpočetního programu uvažováno s konstantním difuzním součinitelem, který byl tedy v čase neměnný, a do úlohy vstupoval hned na začátku výpočtu.

Tato část diplomové práce se zaměřuje právě na zohlednění významu změny difuzního součinitele v čase. Zavedení nestacionárního parametru může vést ke zpřesnění problematiky výpočtu koncentrace chloridových iontů a zajímavé jsou i možnosti srovnání s laboratorními zkouškami [7]. Byl brán ohled i na problematiku vysokopevnostního betonu používaného při stavbě železobetonových mostů [27], [8] [13].

4.1. Difuzní proces

Diplomová práce se podrobně nezabývá difuzním procesem, ale soustředí se na jeho konkrétní části a programové zázemí. Pro lepší pochopení rozdílu mezi časově závislým a nezávislým difuzním součinitelem, je však vhodné uvést některé informace obsažené v původní bakalářské práci [16]. Difuze chloridových iontů patří mezi nestacionární transportní procesy. Difuzní úloha může být popsána systémem parciálních diferenciálních rovnic, které lze následně řešit variační metodou MKP [5]. Při numerickém výpočtu pomocí metody konečných prvků se využívá rovnice druhého Fickova zákona:

$$D_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad /4.1/$$

kde je hledanou neznámou koncentrace chloridových iontů C [%] a vstupními parametry:

- difuzní součinitel D_c [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]
- hloubka hledané koncentrace x [m]
- čas t [s].

Změna koncentrace v závislosti na čase je vyjádřena členem $\frac{\partial C}{\partial t}$, křivost v daném místě x vyjadřuje $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$.

4.2. Vývoj difuzního součinitele v čase

Pro potřeby diplomové práce byly využity vztahy z manuálu programu Life-365 Service Life Prediction Model [9]. Cílem tak nebylo vytvoření nového postupu, ale implementace a ověření vlivu změny difuzního součinitele v čase. Původně do úlohy [26], [10], [16] vstupoval konstantní difuzní součinitel, ale nově byl využit parametr, který se postupem času mění. Tato změna může být popsána různými způsoby, ale pro potřeby práce byla využita tato rovnice [2]:

$$D_c(t) = D_{c,ref} \cdot \left(\frac{t_{ref}}{t} \right)^m \quad /4.2/$$

kde $D_c(t)$ [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$] je difuzní součinitel v čase t , $D_{c,ref}$ [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$] je difuzní součinitel v konkrétním výchozím čase t_{ref} [dny] (např. 28 dní od počátku působení chloridů) a m je bezrozměrná konstanta závislá na materiálových vlastnostech. Konstanta m je závislá na složení betonové směsi a může být odvozena různými způsoby. V manuálu programu Life-365 [2] je jako příklad uveden vzorec, který zohledňuje množství popílku a strusky v betonové směsi u konkrétní betonové směsi:

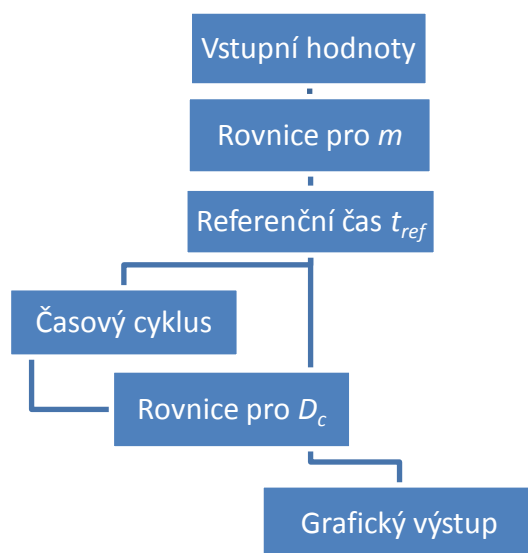
$$m = 0,2 + 0,4 \left(\frac{FA}{50} + \frac{SG}{70} \right) \quad /4.3/$$

kde hodnota FA vyjadřuje procentuální zastoupení zmíněného popílku (z anglického fly ash) a SG představuje množství strusky (z anglického slag).

Další možností pro popis difuzního součinitele v čase představuje práce [7], která zkoumá vztah mezi stářím, pevností a difuzním součinitelem u více než 30 betonových směsí. K určení materiálové konstanty m může být vhodné využití metody nejmenších čtverců [31] za pomoci dat dostupných z laboratorních měření.

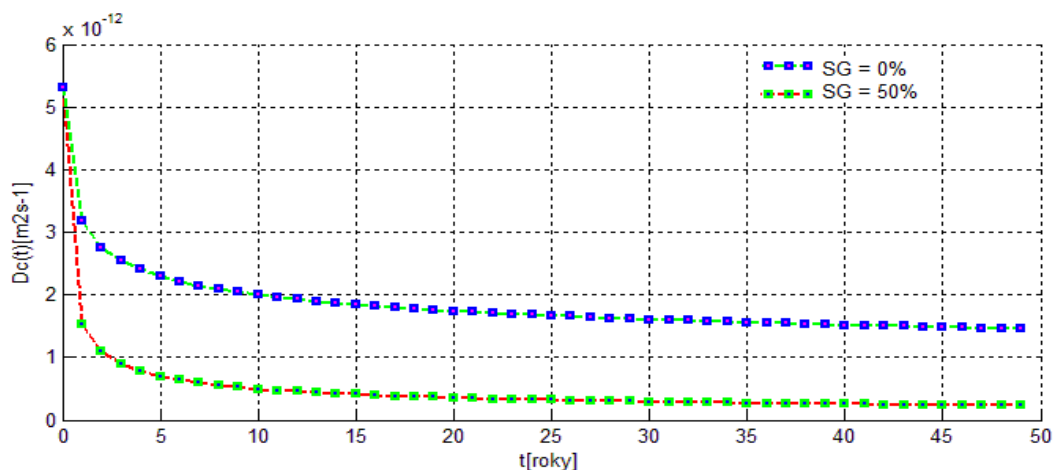
4.3. Algoritmus časově závislého difuzního součinitele

Prvním krokem procesu zkoumání časové závislosti difuzního součinitele bylo vytvoření algoritmu s rovnicemi /4.2/ a /4.3/, který měl sloužit pro lepší pochopení a hlavně kontrolu správnosti postupu. Pro implementaci bylo opět využito softwarové prostředí MatLab [20]. Samostatný algoritmus je založený na rovnicích /4.2/ a /4.3/ a po zadání vstupních parametrů vykresluje změnu hodnoty difuzního součinitele v čase. Na obrázku 4.1 je zobrazeno zjednodušené schéma vytvořeného algoritmu:



Obr. 4.1 Schéma algoritmu pro kontrolu časově závislosti difuzního součinitele

V první fázi byly zadány hodnoty použité v manuálu [2]. Na obrázku 4.2 je zobrazen výstup z výše popsaného kontrolního programu:



Obr. 4.2 Závislost difuzního součinitele na množství strusky v betonové směsi

Graf obsahuje dvě sady hodnot difuzního součinitele měnící se v čase. První varianta označená modrou barvou předpokládá nulové procentuální zastoupení strusky a popílku v betonové směsi. Druhá varianta v červenozelené barevné kombinaci ukazuje, jaký vliv má uvažování s 50% přídavkem strusky do směsi. V obou případech je počáteční hodnota difuzního součinitele $D_c = 10^{-12} \text{m}^2/\text{s}$. Tento algoritmus vytvořený v softwaru MatLab byl mezistupněm k implementaci algoritmu do původního programu [16], který sloužil pro pochopení daných vzorců a postupů.

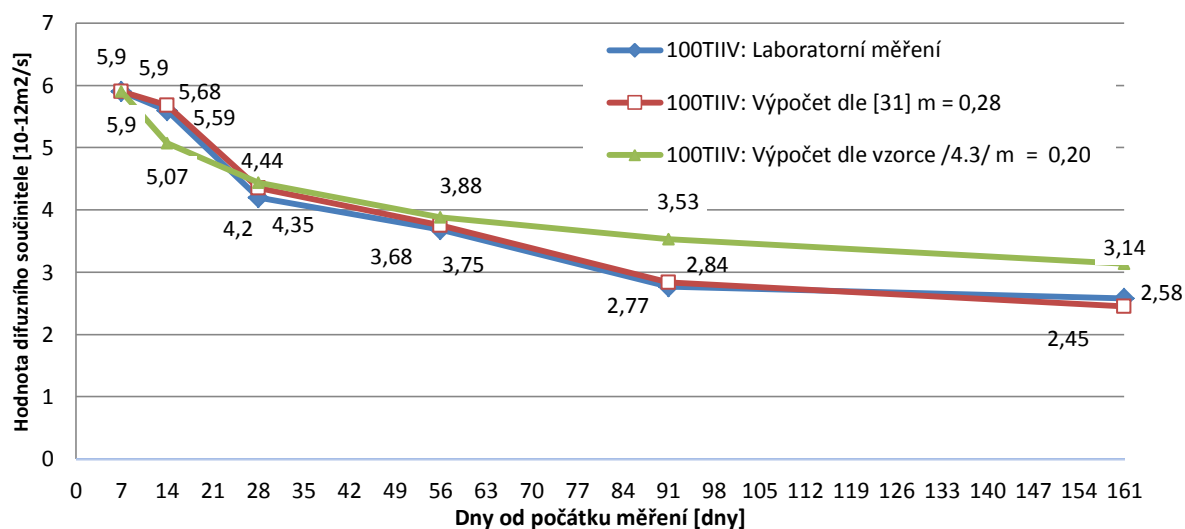
4.4. Porovnání s laboratorními výsledky

Vzhledem k tomu, že byly pro níže uvedenou pravděpodobnostní analýzu využity hodnoty difuzního součinitele z laboratorních měření [7], [8], bylo vhodné zkontrolovat shodu mezi nimi a hodnotami z výše popsaného algoritmu dle vzorce /4.2/. Výsledky byly dostupné v několika variantách. Jako první byla využita směs s označením 100TII-V, která představuje beton s klasickým portlandským cementem [7]. Laboratorní zkoušky proběhly na 32 vzorcích v čase 7, 14, 28, 56, 91 a 161 dní. Pro potřeby srovnání byly určeny průměrné hodnoty v jednotlivých měřicích dnech a do výše popsaného algoritmu byla zadána počáteční referenční hodnota difuzního součinitele $D_{c(7)} = 5,9 \cdot 10^{-12} \text{m}^2/\text{s}$. Pro určení materiálové konstanty m byla využita nejdříve metoda nejmenších čtverců [31] a následně vzorec /4.3/. Dále byla vybrána směs s označením 45TII-V/35G100S/20F [7]. Ta podle dostupných informací obsahuje 35% strusky a 20% popílku. Počáteční hodnota difuzního součinitele zavedená do algoritmu byla stanovena na $3,9 \cdot 10^{-12} \text{m}^2/\text{s}$ a hodnota konstanty m byla opět určena dvěma způsoby. V tabulce 4.2 jsou pak zobrazeny výsledky z laboratorních měření a z výpočtu.

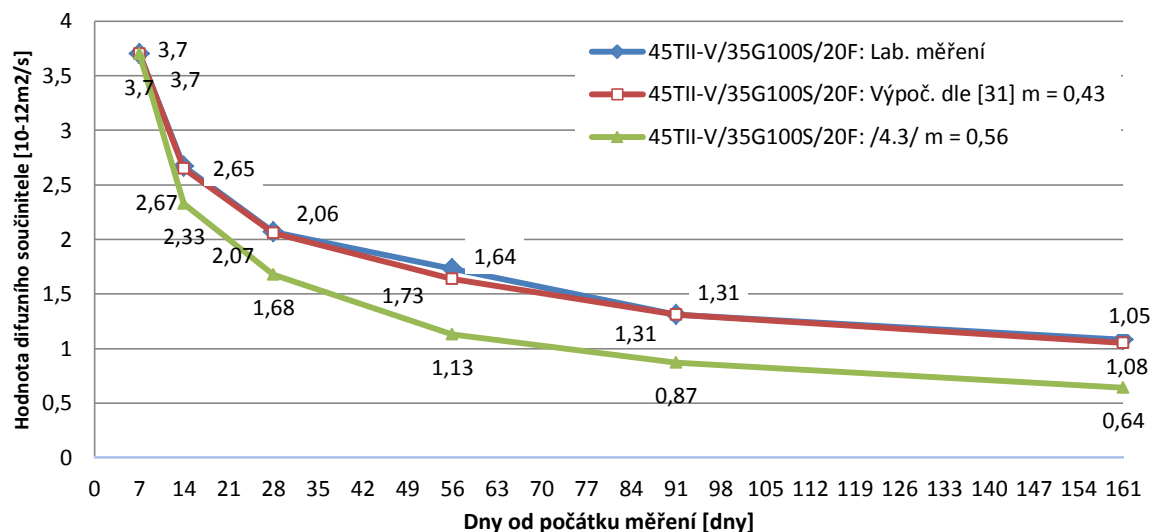
Tabulka 4.2 Výsledné hodnoty difuzního součinitele [$10^{-12} \text{m}^2/\text{s}$]

Dny:	7	14	28	56	91	161
100TII-V: Laboratorní měření	5,90	5,59	4,20	3,68	2,77	2,58
100TII-V: Výpočet dle [31] $m = 0,28$	5,90	5,68	4,35	3,75	2,84	2,45
100TII-V: Výpočet dle vzorce /4.3/ $m = 0,20$	5,90	5,07	4,44	3,88	3,53	3,14
45TII-V/35G100S/20F: Laboratorní měření	3,70	2,67	2,07	1,73	1,31	1,08
45TII-V/35G100S/20F: Výpoč. dle [31] $m = 0,43$	3,70	2,65	2,06	1,64	1,31	1,05
45TII-V/35G100S/20F: /4.3/ $m = 0,56$	3,70	2,33	1,68	1,13	0,87	0,64

Na obrázku 4.3 jsou pak vidět grafická porovnání hodnot z výpočetního programu a z laboratorních z měření [7] z prvního příkladu a na obrázku 4.4 jsou hodnoty z příkladu druhého.



Obr. 4.3 Hodnoty difuzního součinitele v čase [$10^{-12} \text{m}^2/\text{s}$] – 100TII-V



Obr. 4.4 Hodnoty difuzního součinitele v čase [$10^{-12} \text{m}^2/\text{s}$] - 45TII-V/35G100S/20F

Z tabulky 4.2 i z obrázků 4.3 a 4.4 lze usoudit, že uspokojivá shoda je mezi výsledky z laboratorních zkoušek a z výpočtu při užití materiálové konstanty m odvozené pomocí metody nejmenších čtverců [31]. Naopak hodnoty dle vzorce /4.3/ se s laboratorními výsledky příliš neshodují, i když vykazují podobnou tendenci průběhu v čase. Vzhledem k tomu, že pravděpodobnostní analýza využívá jako vstupy hodnoty difuzního součinitele z uvedených

laboratorních měření [7], bylo rozhodnuto o použití metody nejmenších čtverců při výpočtu konstanty m .

4.5. Aplikace algoritmu do výpočetního programu

Po kontrole předpokládaných postupů a vytvoření algoritmu se nově vytvořené části zavedly do původního programu [16]. Úprava algoritmu spočívala ve vytvoření nového časového cyklu dle kontrolního programu. Do tohoto cyklu byla vložena část původního algoritmu, která se stará o výpočet a lokalizaci matice vodivosti K a kapacity C a část, která zavádí okrajové podmínky.

Do algoritmu byly zavedeny nové parametry, jako je počáteční součinitel difuze $D_{c,ref}$, materiálová konstanta m a počáteční referenční čas t_{ref} . Tento fakt je důležitý s ohledem na další využití programu jako funkce při pravděpodobnosti analýze.

V samotném výpočetním cyklu se vyskytuje rovnice pro výpočet časově závislého difuzního součinitele D_c /4.2/. V každém kroku časového cyklu jsou vypočteny matice vodivosti a kapacity jednotlivých konečných prvků a následně lokalizovány globální matice.

Stejně se tak v každém kroku zavádějí okrajové podmínky. Časová diskretizace probíhá s výslednými maticemi stejně jako v původním programu [16]. Celý algoritmus byl následně upraven na formu funkce, kterou je možno vyvolat zadáním přesných vstupních parametrů. Před postupem do další fáze procesu byla však nutná kontrola upraveného algoritmu pomocí výsledku z komerčního softwaru.

4.6. Řešený příklad

V úloze, na které se kontrolovaly výsledky upraveného programu, bylo zkoumáno 1D chování chloridových iontů pomocí připraveného 2D modelu. Výsledné hodnoty koncentrace chloridových iontů pak byly porovnány s výsledky z komerčního softwaru Ansys [1], [12] .

Program tak uvažoval s řezem mostovky, která se v celé ploše chová jako homogenní prvek se stejnými materiálovými vlastnostmi. Úloha se dělila na dva příklady, které měly několik

shodných vstupních hodnot. Konkrétní parametry a jejich velikosti jsou uvedeny v tabulce 4.2 a byly převzaty z článku z konference Modelování v mechanice 2013 [12]:

Tabulka 4.2 Vstupní hodnoty úlohy

Parametr	Hodnota
Koncentrace chloridů na povrchu konstrukce [%]	0,63
Počáteční difuzní součinitel $D_{c,ref}$ [$10^{-12} \text{m}^2/\text{s}$]	5,3 [27]
Výška železobetonové mostovky h [m]	0,23
Šířka výřezu železobetonové mostovky b [m]	0,60
Hloubka míst porovnávané koncentrace [m]	0.09

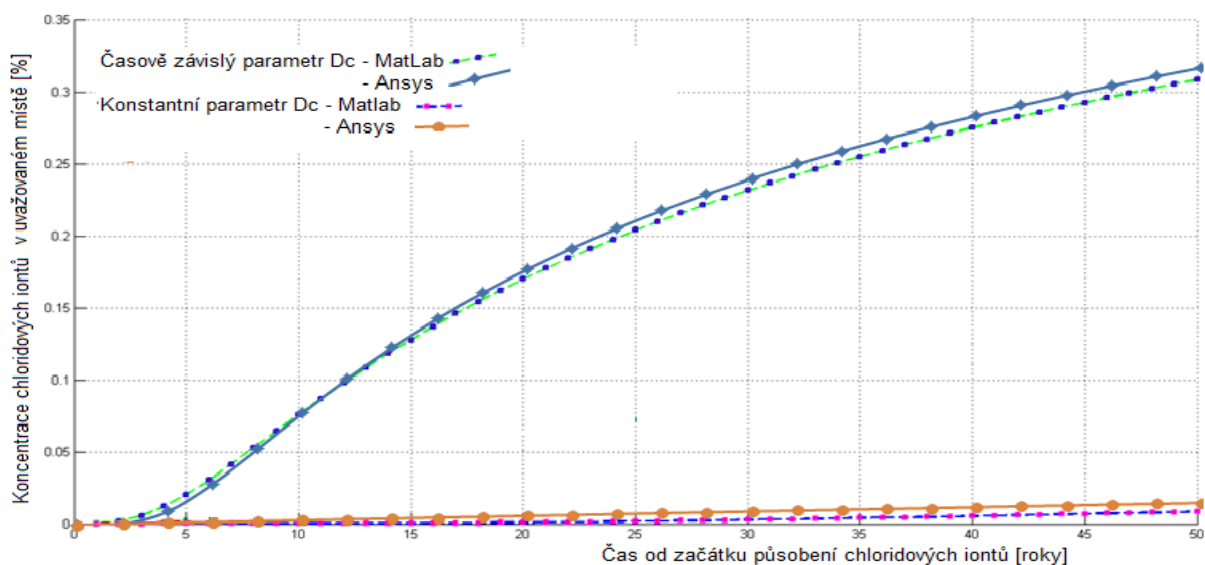
Do úlohy kromě zmíněných parametrů vstoupila materiálová konstanta m dle vzorce /4.3/. V jednom příkladu byla hodnota difuzního součinitele uvažována jako časově konstantní a hodnota parametru m tedy nulová. Druhý příklad byl počítán s časově závislým difuzním součinitelem, a proto byla stanovena hodnota strusky v betonové směsi na 50 % a popílku na 0 %, což nastavilo konstantu m na hodnotu 0,487 [12]. V tabulce 4.3 jsou zobrazeny konkrétní hodnoty koncentrace chloridových iontů dle uvedených vstupů.

Tabulka 4.3 Výsledné hodnoty koncentrace chloridových iontů v hloubce 0,09 m pod povrchem mostovky [%]

Roky působení chloridů		10	20	30	40	50
Konstantní Dc	Ansys	0,0773	0,1769	0,2398	0,2833	0,3165
	MatLab	0.0772	0,1763	0,2314	0,2828	0,3104
Časově závislý Dc	Ansys	0,0004	0,0023	0,0080	0,0112	0,0160
	MatLab	0,0003	0,0022	0,0069	0,0106	0,0157

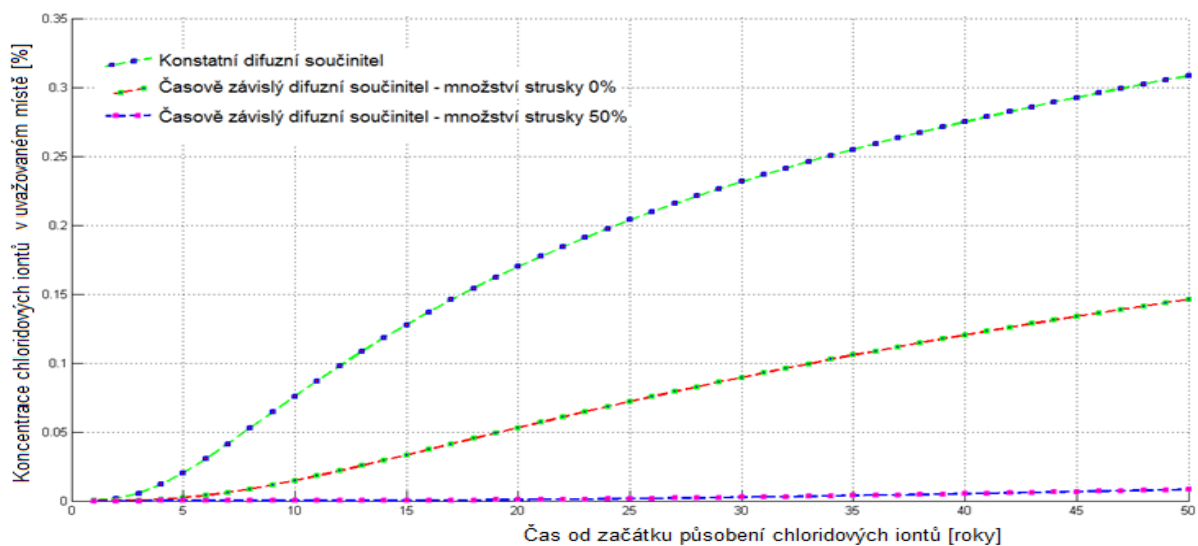
Numerické hodnoty v tabulce 4.3 i grafické srovnání na obrázku 4.5 poukazuje na dostatečnou podobnost výsledků v obou případech. Rozdíl mezi danými barevnými grafy může

být způsoben nepřesnou lokalizací daného bodu v případě grafické funkce programu. I přesto je podobnost na dostačující úrovni.



Obr. 4.5 Hodnota koncentrace chloridových iontů v místě 0,09 m pod povrchem [%]

Uspokojivé porovnání výsledků výpočtu dle modelu z MatLabu a Ansysu umožňovalo v pokračování v práci směřované k pravděpodobnostnímu posudku. Ještě předtím byly zkoumány rozdílné výsledky s ohledem na užití konstantního difuzního parametru a časově závislého parametru D_c s různým množstvím strusky (SG) a tím pádem rozdílnou hodnotou parametru m . Do úlohy s parametry uvedenými v tabulce 4.1 byla přidána varianta s nulovým množstvím strusky. Hodnota materiálové konstanty m byla podle vzorce /4.3/ 0,2. Výsledky (obrázek 4.6) jsou zobrazeny na podobném grafu jako v případě předchozí úlohy.



Obr. 4.6 Vliv materiálové konstanty m na koncentraci chloridových iontů v čase [%]

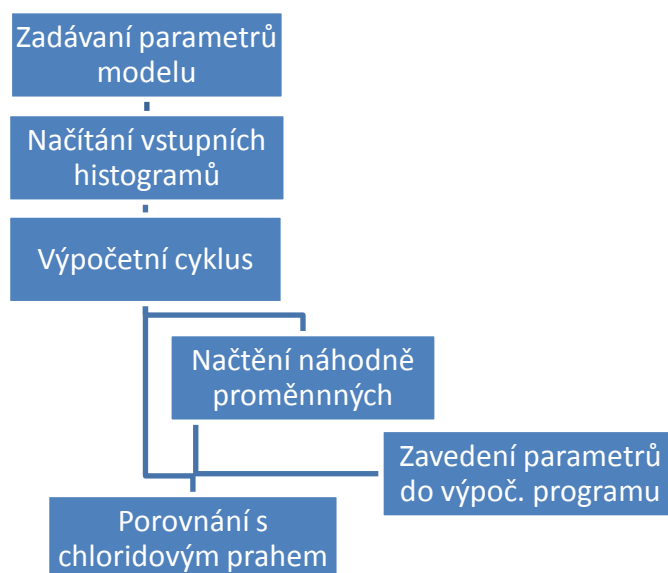
Tento okrajový příklad byl zvolen kvůli pochopení vlivu materiálové konstanty m . Na grafickém výstupu bylo možno posoudit očekávaný efekt zpomalení difuzního procesu při užití časově závislého difuzního součinitele. Zvláštní vliv mělo zohlednění vysokopevnostního betonu s příměsí strusky nebo popílku. Tento poznatek byl následně zkoumán i při pravděpodobnostní analýze v dalších kapitolách.

5. Pravděpodobnostní analýza

V úvodu je zmíněno, že zde popisovaná práce se zabývala posouzením pronikání chloridových iontů přes betonovou mostovku k výztuži. Pravděpodobnostní analýza dané konstrukce byla založena na metodě Simulation-Based Reliability Assessment [17]. Ta vychází ze simulační metody Monte Carlo a využívá náhodně proměnné vstupní veličiny v podobě useknutých rozdělání.

5.1. Hlavní algoritmus

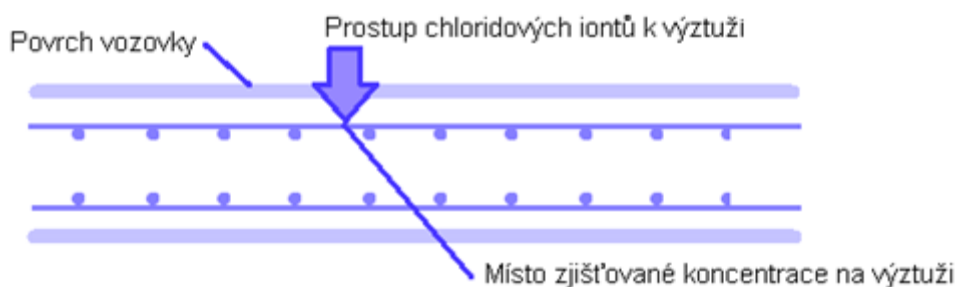
Prvním krokem v této části procesu, bylo vytvoření páteřního programu, který bude sloužit jako vstupní brána do výpočtu. Program vytvořený v prostředí MatLab [20] je nazván stejně jako diplomová práce, tedy *Pravděpodobnostní analýza s využitím izoparametrických konečných prvků*, zkráceně *PASVIK*. Do programu vstupují data ve formě histogramů a konkrétních parametrů. Cyklus pak do výpočetního programu zavádí náhodně proměnné vstupy na základě popisu distribuční funkce useknutým histogramem. Výstupem modelu je časová řada koncentrací chloridových iontů v místě výztuže železobetonové mostovky. Dané hodnoty jsou následně porovnány s tzv. korozním prahem, tedy hodnotou, při které je iniciována koroze ocelové výztuže. Na obrázku 5.1 je zobrazen hlavní algoritmus diagramem, který schematicky znázorňuje jeho jednotlivé části.



Obr. 5.1 Diagram hlavního algoritmu PASVIK

Jak již bylo řečeno, hlavní program je koncipován jako řídicí prvek, do kterého jsou zadávány parametry modelu. Diagram na obrázku 5.1 obsahuje výpočetní cyklus, ve kterém je opakovaně prováděna analýza úlohy 2D difuze chloridů. V každém kroku cyklu jsou načtena konkrétní vstupní data dle algoritmu na generování pseudonáhodných čísel. Dále je vyvolán výpočetní program, který rozdělí konstrukci na konečné prvky a vypočte koncentraci chloridových iontů na celé ploše dle daných parametrů.

Je uvažován model železobetonové mostovky bez ochrany ocelové výztuže. Model dále bere v potaz, že předpokládané umístění výztuže je pod horním okrajem mostovky. Obrázek 5.2 ukazuje schématické zobrazení řezu mostovky s naznačením výztuže a znázorněním prostupu chloridových iontů. I když se jedná o nelineární 2D model, v rámci uvažované úlohy je prakticky zkoumáno 1D chování difuze.



Obr. 5.2 Řez mostovkou se schématickým znázorněním prostupu chloridů

Na obrázku 5.2 je konkrétně označeno místo, ve kterém je zjišťována koncentrace chloridových iontů C_{zt} , jejichž hodnota je následně porovnávána s korozním prahem C_{th} . Při posuzování dané úlohy se vychází z inicializace koroze, která je funkcí spolehlivosti RF_t . Ta je vyjádřena jako časově závislé překročení korozního prahu C_{th} koncentrací chloridů C_{zt} , což vyjadřuje tato rovnice [14]:

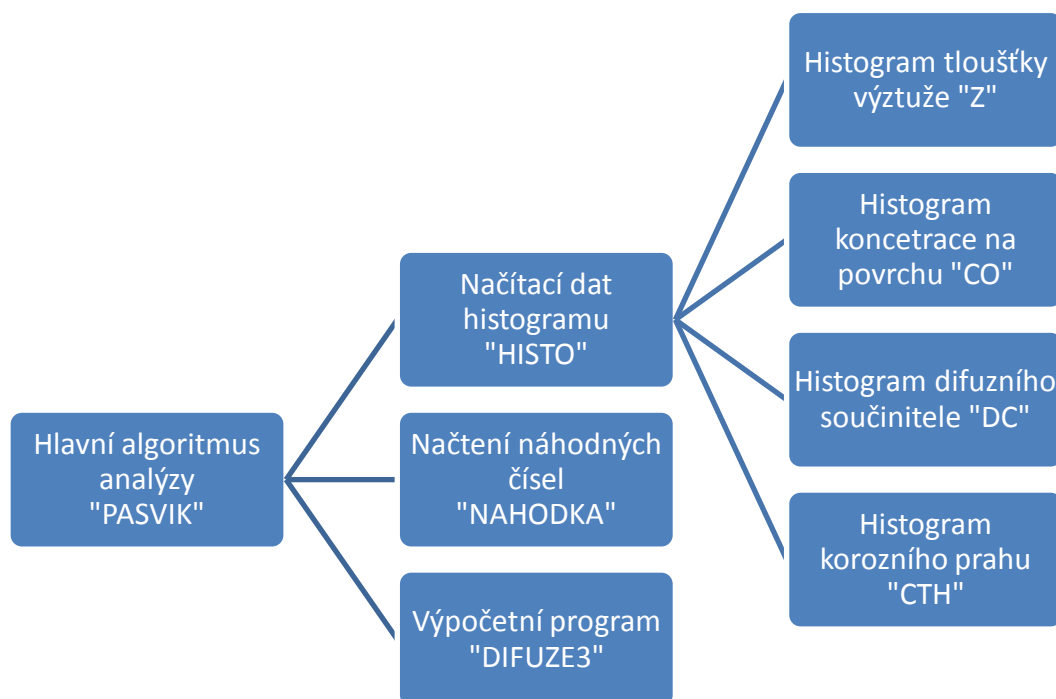
$$RF_t = C_{th} - C_{zt} \quad /5.1/$$

Cílem programu je určení odhadu pravděpodobnosti vzniku koroze výztuže mostovky v závislosti na čase od výstavby. Odhad pravděpodobnosti $P_{f,t}$ v konkrétním čase t je zobrazován v procentech a stanoven dle následující rovnice [14]:

$$P_{f,t} = P(RF_t < 0) = P(C_{th} - C_{zt} < 0) \quad /5.2/$$

5.2. Podpůrné algoritmy

Kromě výpočetního programu popsaného v kapitole 4, jsou pro výpočet potřebné další dva algoritmy. Stejně jako hlavní a výpočetní algoritmus, tak i podpůrné algoritmy jsou implementované do programového prostředí MatLab [20]. Hlavní program *PASVIK* vyvolává jednotlivé algoritmy ve formě funkcí na daný parametr, což je schematicky ukázáno diagramem na obrázku 5.3.



Obr. 5.3 Návaznost všech souborů programů a dat fungujících v rámci úlohy

Diagram na obrázku 5.3 dále obsahuje vztah mezi funkcí *HISTO* a soubory s informacemi o použitých parametrech. Tato funkce slouží pro načítání potřebných informací ze souborů [23], [7], [22]. Z dostupných dat program načte minimum, maximum, počet vzorků, počet tříd a četnost jednotlivých tříd dané veličiny, které jsou potřebné pro výpočet náhodných parametrů. Funkce *HISTO* byla vytvořena na základě funkce *mc* Ing. Pavla Prakse, Ph.D. [21].

Poslední podpůrný algoritmus je nazván *NAHODKA*. Tato funkce zavádí do páteřního algoritmu náhodné parametry dle kritérií konkrétních histogramů. Program pracuje na principu metody Monte Carlo a používá funkci *rand* v MatLab. Ta generuje pseudonáhodná čísla v rozmezí mezi hodnotami 0 a 1. Program *NAHODKA* následně vloží tuto hodnotu do intervalu vztaženého ke konkrétnímu histogramu.

5.3. Vstupní parametry

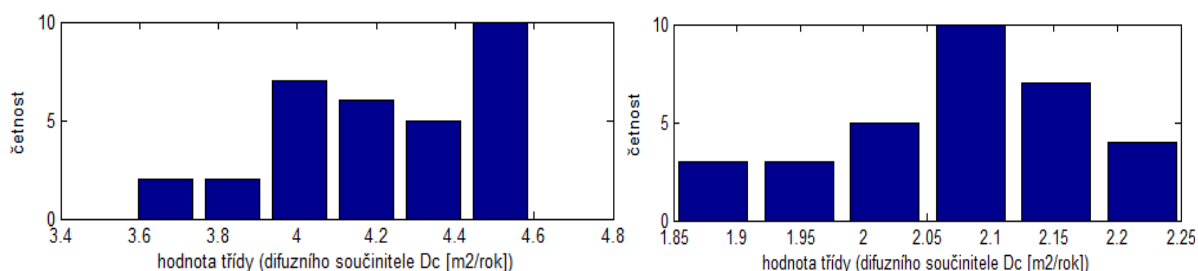
Do úlohy vstupuje řada hodnot. Některé formou histogramů a některé jako konstantní parametry. Všechna data, která nejsou načítána z histogramů, může uživatel v páteřním algoritmu změnit a tím upravit model na konkrétní úlohu. V tabulce 5.1 jsou uvedeny všechny parametry vstupující do úlohy a konkrétní hodnoty pro uvažované příklady. Byly použity čtyři sady vstupních dat, jejichž bližší popis je uveden v následující kapitole.

Tabulka 5.1 Seznam hodnot vstupujících do úlohy

Parametr	Rozptyl hodnot	Vstup
Difuzní koeficient D_c [$10^{-12}\text{m}^2/\text{s}$]	příklad A1,A2: 3,66 – 4,51 [7] příklad B1,B2.: 1,88 – 2,22 [7]	histogram (obr. 5.4)
Materiálová konstanta m [-]	příklad A1, B1: 0 příklad A2: 0,2760 příklad B2: 0,4031	konstanta
Hloubka výztuže (krytí) Z [m]	0,04 – 0,11 [13]	histogram (obr. 5.5)
Efektivní koncent. chloridů u povrchu C_0 [%]	0,21 – 1,63 [13]	histogram (obr. 5.6)
Chloridový práh pro počátek koroze C_{th} [%]	0,09 – 0,51 [12]	histogram (obr. 5.7)
Koncentrace chloridů na pozadí C_i [%]	0,00	konstanta
Šířka výřezu mostovky b [m]	0,01	konstanta
Výška mostovky h [m]	0,25	konstanta
Počet konečných prvků na šířku [-]	0,01	konstanta
Počet konečných prvků na výšku [-]	0,25	konstanta
Doba, kdy je zkoumána koncentrace [roky]	10, 20, 30, 40, 50	konstanta
Počet simulací N [-]	10 000	konstanta

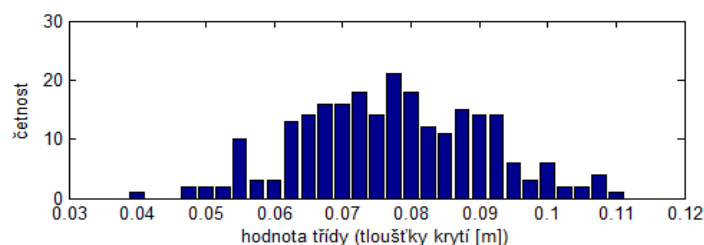
V tabulce 5.1 jsou uvedeny čtyři parametry, které do úlohy vstupují jako pravděpodobnostně volené veličiny. Prvním z nich je difuzní součinitel D_c , jehož hodnoty byly získány z laboratorních zkoušek [7]. Při těch bylo vytvořeno několik betonových směsí, na kterých byl pomocí různých metod zkoumán difuzní součinitel. Pro potřeby této práce byly využity dva typy směsí, které jsou zmíněny již v příkladu v kapitole 4.4. Jedná se o směs s klasickým portlanským cementem označenou 100TII-V a směs tzv. vysokopevnostního

betonu s příměsí 35 % strusky a 20 % popílku, která má označení 45TII-V/35G100S/20F. U obou typů bylo v době 28 dní od vytvoření vzorků provedeno 32 měření a z nich byly získány data pro příklady. Na obrázku 5.4 jsou pak vidět histogramy pro obě směsi.

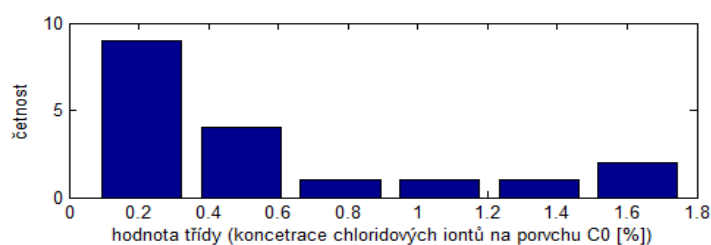


Obr. 5.4 Histo. součinitele D_c pro směs 100TII-V (vlevo) a směs 45TII-V/35G100S/20F [7]

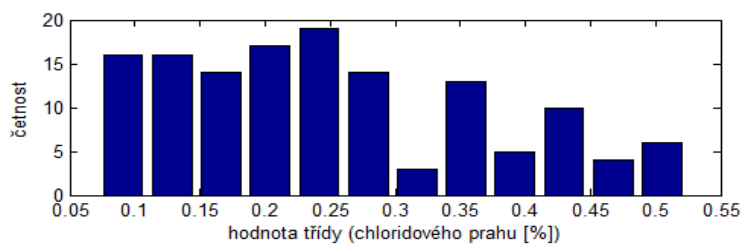
Dalšími náhodně proměnnými parametry jsou tloušťka krytí výztuže Z (obrázek 5.5) [23], koncentrace chloridových iontů C_0 (obrázek 5.6) [22] a chloridový práh C_{th} (obrázek 5.7) [13], který je vztažen ke klasicky používané výztuži železobetonových konstrukcí.



Obr. 5.5 Histogram tloušťky krytí Z [23]



Obr. 5.6 Histogram koncentrace chloridových iontů na povrchu mostovky C_0 [22]



Obr. 5.7 Histogram chloridového prahu C_{th} [13]

6. Výsledky analýzy příkladu

Výše je uvedeno, že bylo uvažováno se čtyřmi příklady výpočtu. Pro přehlednost byly označeny jako A1, A2, B1, B2. Ty se v zásadě liší jen v rozdílném přístupu k difuznímu součiniteli. Všechny vstupní hodnoty jsou již zapsány v tabulce 5.1, kde je taky konkrétně označeno, jaký difuzní součinitel je použit u kterého příkladu. Do úlohy A1 a B1 vstupuje difuzní součinitel D_c jako konstantní. Naopak u úlohy A2 a B2 je součinitel $D_c(t)$ na čase závislý, a proto je použito relevantní hodnoty konstanty m . Následuje podrobnější popis příkladu A1 s uvedenými výsledky a zhodnocením.

6.1. Pravděpodobnost inicializace koroze příkladu A1

Úloha A1 uvažovala s daty pro difuzní součinitel D_c získanými z laboratorních zkoušek ze směsi 100TII-V [7]. Jak je uvedeno v kapitole 4.4, materiálová konstanta $m=0,276$ byla stanovena pomocí metody nejmenších čtverců [31]. Do hlavního algoritmu programu *PASVIK* byly zadány všechny uvedené hodnoty a byl spuštěn výpočetní cyklus.

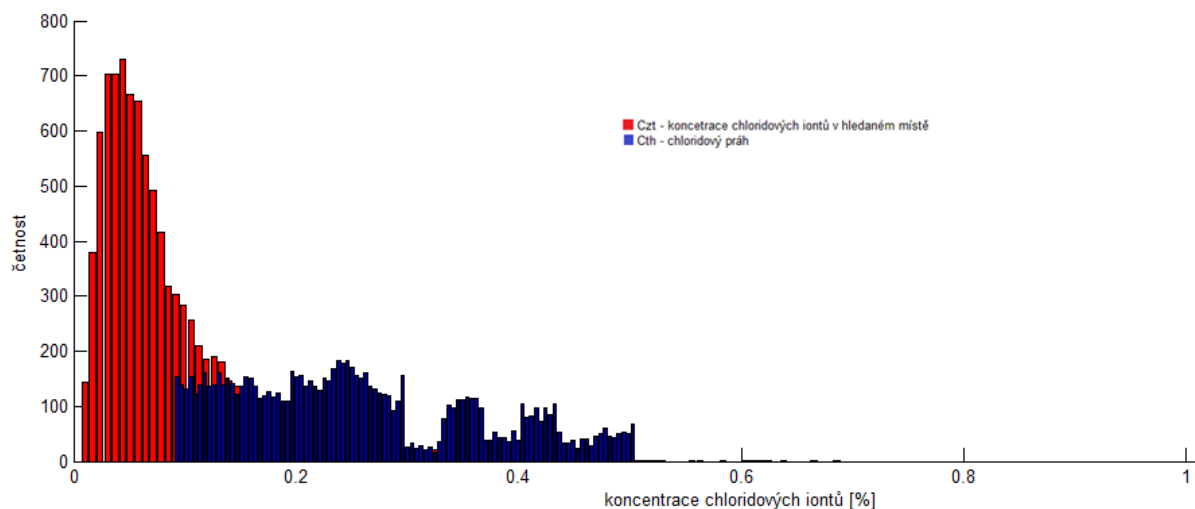
Prvním výstupem programu byl odhad pravděpodobnosti inicializace koroze $P_{f,t}$ v určitých časových úsecích, který je uváděn v procentech. Tento parametr určuje spolehlivost ocelové výztuže s ohledem na počátek koroze. Při stochastické analýze byl použit vzorec 5.1 popsáný v jedné z předchozích kapitol.

Dle tabulky 6.1 je patrné, že pravděpodobnost vzniku koroze je pro příklad A1 v době deseti let $P_{f,10} = 9,62 \%$. Naopak v době 50 let je hodnota již $P_{f,50} = 54,07 \%$. Všechny uvedené hodnoty je nutno brát s rezervou, protože jsou vztaženy na konkrétní zadání a lze je tak využít hlavně při porovnání mezi různými změnami hodnot vstupních parametrů.

Tabulka 6.1 Odhad pravděpodobnosti započení koroze $P_{f,t} [\%]$

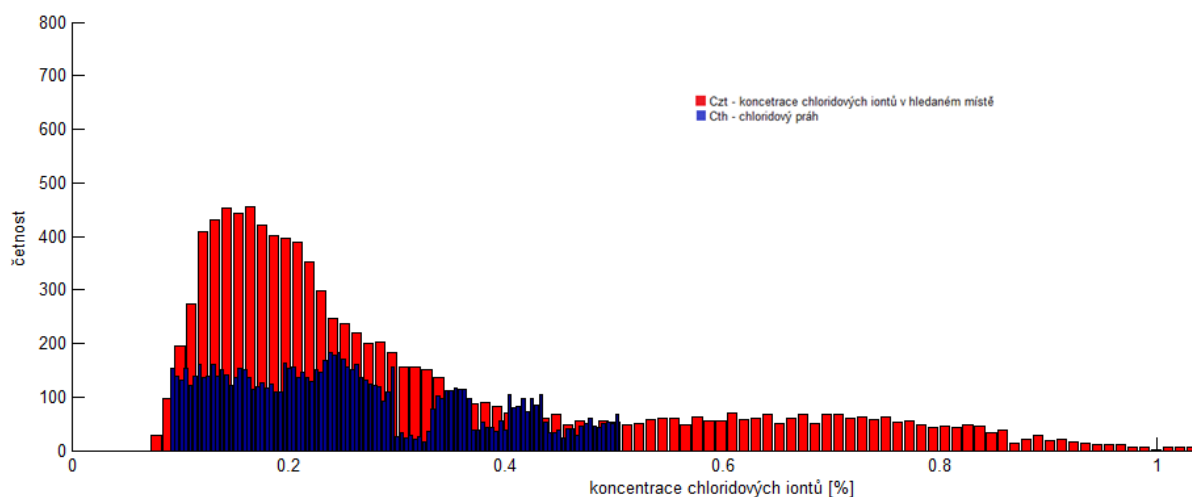
Roky	10	20	30	40	50
Příklad A1	9,62	29,91	41,70	49,11	54,07

S pravděpodobnostní inicializace koroze $P_{f,t}$ je logicky spjatá funkce spolehlivost RF_t , která je závislá na koncentraci chloridových iontů C_{zt} v zadaném čase a na chloridovém prahu C_{th} , dle rovnice 5.2. Algoritmus vykresloval histogramy obou těchto hodnot. Na obrázku 6.1 je uveden histogram C_{zt} a C_{th} pro období 10 let.



Obr. 6.1 Histogram koncentrace chloridových iontů C_{zt} v čase 10 let (červená barva) společně s histogramem chloridového prahu C_{th} (modrá barva) [%]

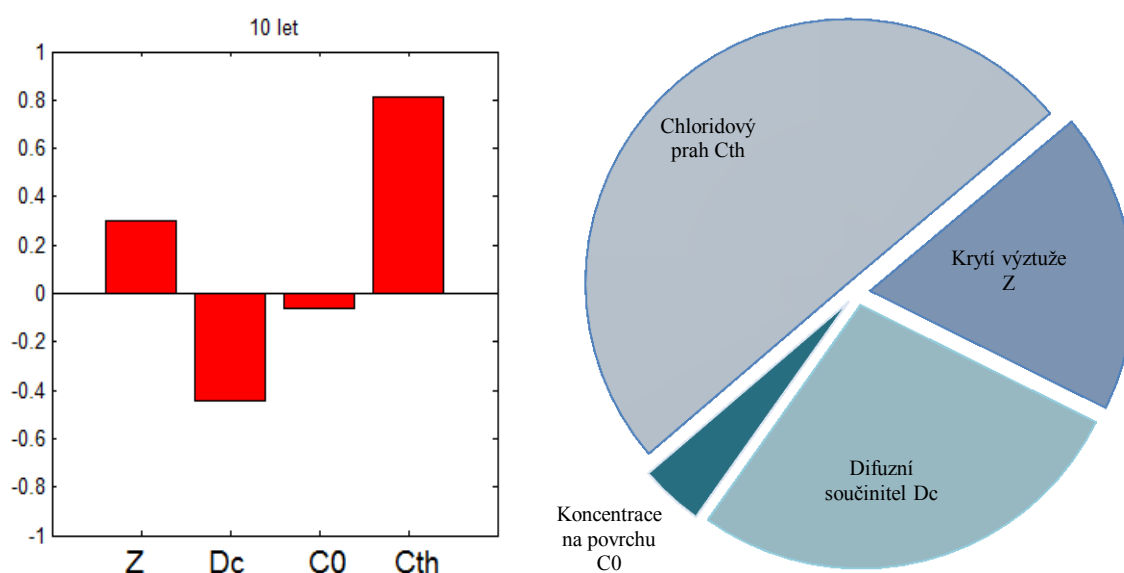
Bylo zjištěno, že průměrná hodnota koncentrace C_{zt} v daném místě a čase 10 let od působení chloridů na povrch je 0,0937 %. Pro srovnání postupu chloridových iontů v konstrukci jsou na obrázku 6.2 uvedeny hodnoty v čase 50 let od počátku působení chloridových iontů. Je patrné, že chloridový práh C_{th} je stejný, ale koncentrace C_{zt} narůstá a histogram se přesouvá do pravé části. Průměrná hodnota byla spočítána na 0,3218 %.



Obr. 6.2 Histogram koncentrace chloridových iontů C_{zt} v čase 50 let (červená barva) společně s histogramem chloridového prahu C_{th} (modrá barva) [%]

6.2. Citlivostní analýza příkladu A1

Dalším výstupem, který zde popisovaný algoritmus umožňuje, jsou hodnoty dle citlivostní analýzy funkce spolehlivosti RF_t . V rámci této analýzy byly pomocí korelační metody porovnány vstupní hodnoty všech čtyř nahodile proměnných parametrů - tloušťka krytí výztuže Z , difuzní součinitel D_c , koncentrace chloridových iontů C_0 a chloridový práh C_{th} , právě s funkcí spolehlivosti RF_t v pěti časových obdobích. Obrázek 6.3 představuje výstup z programu vztahený na 10 rok působení chloridů pro případ A1.



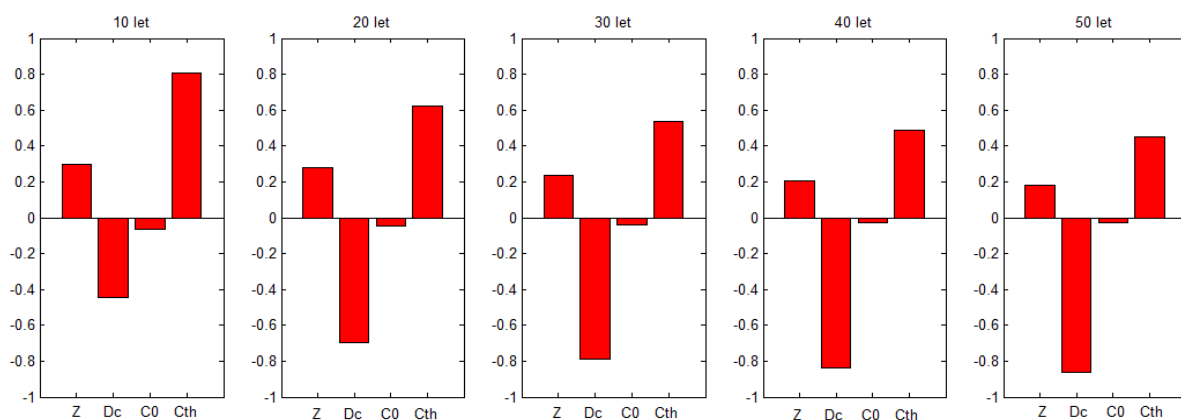
Obr. 6.3 Citlivostní analýza funkce spolehlivosti RF_t pro 10 let působení chloridů

V levé části je sloupcové zobrazení součinitele korelace daného příkladu. Záporná hodnota představuje míru nepřímé úměry ke vztažené veličině a naopak kladná hodnota představuje míru přímé úměry. Konkrétně z této části analýzy, která je vztažena na první dekádu od působení chloridových iontů se dá usoudit, že model je citlivý na hodnotu chloridového prahu, difuzního součinitele a částečně i na krytí výztuže.

Pravá část obrázku 6.3 zobrazuje rozložení jednotlivých vlivů. Chloridový práh má v tomto časovém období a při těchto parametrech téměř 50 % vliv na výsledné hodnoty funkce spolehlivosti inicializace koroze výztuže. Kladný index součinitele korelace na levé části obrázku navíc ukazuje, že úměra mezi C_{th} a RF_t je přímá. Naopak difuzní součinitel D_c má na pravděpodobný počátek korozního procesu nepřímý vliv. Stejně je na tom i čtvrtý zkoumaný

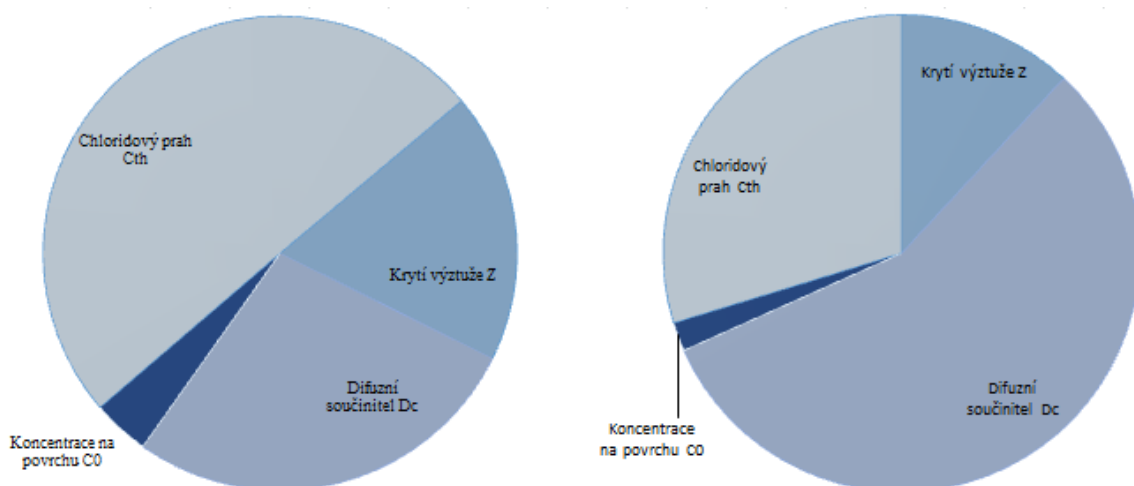
parametr, tedy koncentrace chloridových iontů na povrchu C_0 , ale jeho výsledky v citlivostní analýze ukazují, že vliv je minimální.

Citlivostní analýza dále přináší možnost srovnat míru vlivů jednotlivých parametrů v závislosti na čase působení. Obrázek 6.4 tak ukazuje opět všechny čtyři výše zmíněné parametry vztažené k funkci spolehlivosti RF_i . Je zde zobrazeno pět grafů ukazujících míru korelačního součinitele pro období 10, 20, 30, 40 a 50 let od počátku působení chloridových iontů na konstrukci.



Obr. 6.4 Porovnání citlivostní analýzy funkce spolehlivosti RF_i v 5 dekadách

Ze zde zobrazených dat je patrné, že v průběhu doby se dle analýzy patrně snižuje vliv chloridového prahu C_{th} a naopak narůstá vliv difuzního součinitele D_c . Jak velká je to změna dokazuje i obrázek 6.5, na kterém je pro porovnání opět uvedena míra vlivu po 10 letech (vlevo) a k ní je přidána míra vlivu po 50 letech.



Obr. 6.4 Míra vlivu parametrů v citlivostní analýze po 10 letech (vlevo) a 50 letech

7. Porovnání výsledků úloh

V rámci předkládané diplomové práce se pomocí výše popsaného výpočetního programu *PASVIK* provedly čtyři sady simulačních výpočtů. Jak již bylo popsáno výše, jednalo se o příklady A1 a A2, u kterých vstupuje do úlohy difuzní součinitel D_c vztažený na betonovou směs s označením 100TII-V a příklady B1 a B2, kde bylo uvažováno s difuzním součinitelem dle směsi 45TII-V/35G100S/20F.

Všechny parametry vstupující do příkladů jsou uvedeny v tabulce 5.1, ale pro přehlednost je v tabulce 7.1 opět uvedena hodnota difuzního parametru D_c a materiálové konstanty m u jednotlivých zadání.

Tabulka 7.1 Hodnoty vstupujících do jednotlivých úloh

Příklad	A1	A2	B1	B2
Difuzní koeficient D_c [10 ⁻¹² m ² /s] (histogram)	3,66 – 4,51 [7]	3,66 – 4,51 [7]	1,88 – 2,22 [7]	1,88 – 2,22 [7]
Materiálová konstanta m [-]	0	0,2760	0	0,4031

Je nutno zapakovat, že hodnota $m = 0$ u příkladu A1 a B1 určuje, že difuzní součinitel D_c bude po celou dobu konstantní. Naopak u příkladu A2 a B2 je difuzní součinitel časově závislý. Efekt na koncentraci chloridových iontů v čase je prokázán již v kapitole 4, a proto jsou v této části uvedeny porovnání mezi zmíněnými příklady. Vzhledem k tomu, že jsou do příkladu zadávány různé hodnoty jen u difuzního součinitele, mohou výsledky přinést nový pohled na pravděpodobnostní analýzu difuzního procesu chloridových iontů v železobetonu právě s ohledem na tento parametr a jeho vliv na výpočet.

7.1. Porovnání pravděpodobností inicializace koroze

Vzhledem k tomu, že příklad A1 je podrobně analyzován v kapitole 6, zde uvedené výsledky a výstupy jsou popsány s kratším komentářem. Prvním parametrem, který byl použit na porovnání zkoumaných příkladů je koncentrace chloridových iontů C_{zt} v čase 50 let od počátku působení.

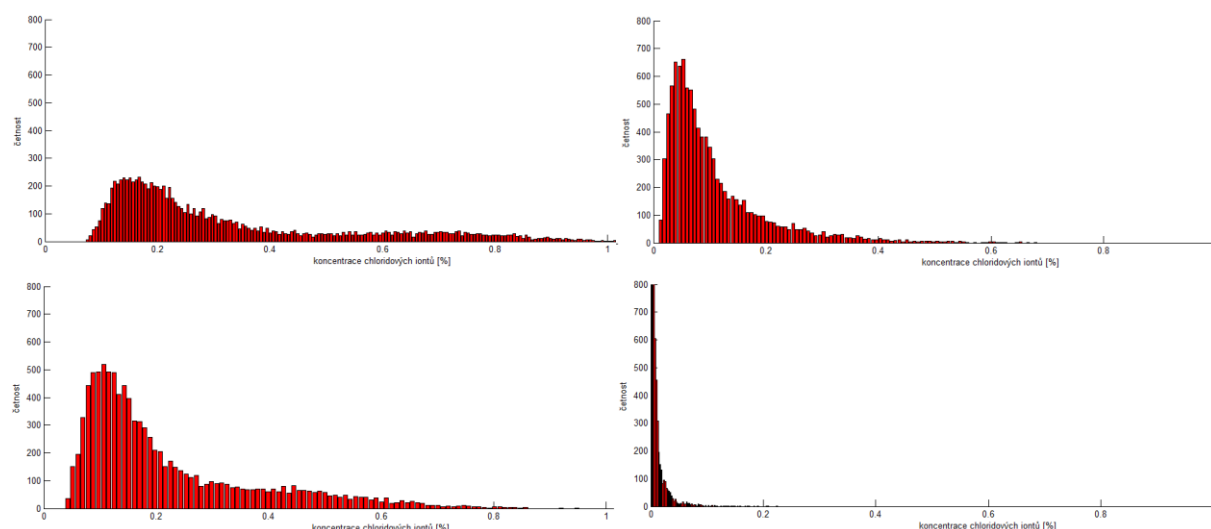
Výstupem z programu byly kromě průměrné hodnoty parametru C_{zt} , také histogram zobrazující právě počet hodnot chloridových iontů dle rozdělení. V tabulce 7.2 jsou nejdříve uvedeny průměrné hodnoty koncentrací chloridových iontů ve sledovaném místě pro jednotlivé úlohy.

Tabulka 7.2 Průměrná hodnota koncentrací chloridových iontů po 50 letech působení

Příklad	A1	A2	B1	B2
Průměrná hodnota C_{zt} [%]	0,3218	0,1071	0,2191	0,0071

Tyto hodnoty samy o sobě poukazují, jak na rozdíl při použití jiných hodnot konstantního difuzního součinitele, tak při významné změně výsledku v případě uvažování s časově závislým parametrem. Hodnoty v tomto případě doplňují závěry u příkladu uvedeného v kapitole 4.

Lepší vypovídající hodnotu však mají grafické výstupy. Na obrázku 7.1 jsou proto zobrazeny histogramy vytvořené pro stejné časové období, tedy zmíněných 50 let od začátku působení chloridů.



Obr. 7.1 Histogramy funkce spolehlivosti RF_{50} v čase 50 let o začátku působení chloridů - A1 (vlevo nahoře), A2 (vpravo nahoře), B1 (vlevo dole), B2 (vpravo dole)

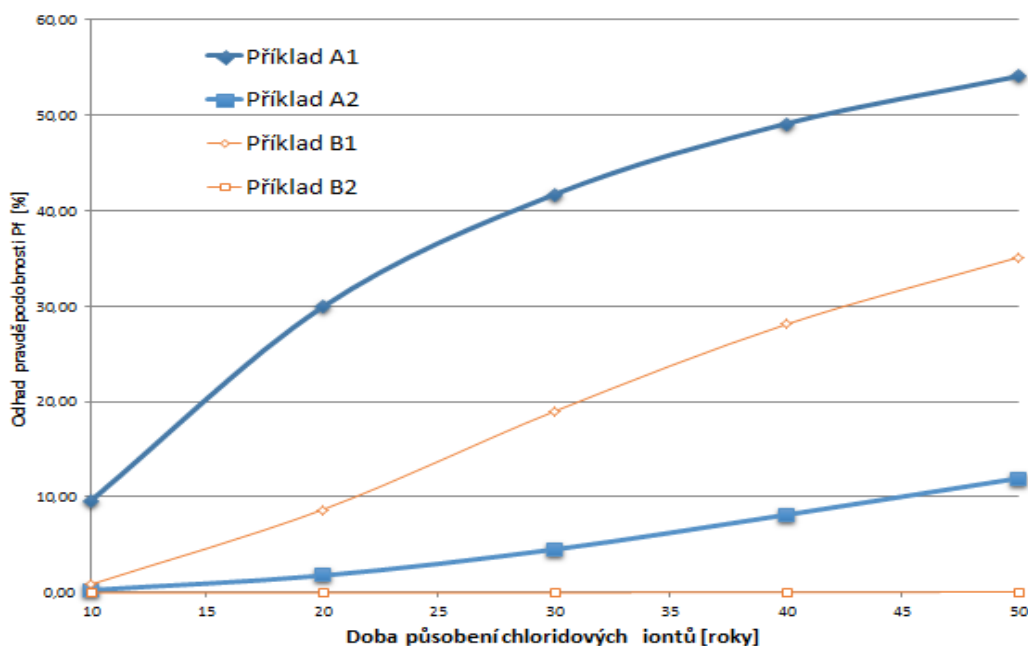
Z obrázku a z tabulky 7.2 lze určit několik informací. Předně, porovnání mezi příklady A1 a B1 dokazuje, že vysokopevnostní směs 45TII-V/35G100S/20F má oproti směsi 100TII-V dle výsledků výpočtu větší odpor proti pronikání chloridových iontů a tím pádem i lepší ochranu

samotné výztuže. Úlohy, u kterých byl zvolen časově závislý difuzní součinitel, tedy A2 a B2, vykazují ze stejného pohledu ještě větší posun. Celkové zhodnocení těchto poznatků je uvedeno v závěru diplomové práce.

Stejně jako v kapitole 6, i zde výpočetní algoritmus umožnil posouzení odhadu pravděpodobnosti započení koroze $P_{f,t}$. Výsledky u jednotlivých příkladu mají podobnou rozdílnostní tendenci, jako u předchozího posudku. V tabulce 7.3 si tak můžeme všimnout, že příklad B2 vykazuje výrazně nižší hodnotu pravděpodobnosti započetí koroze než ostatní úlohy. Výsledky jsou pak zobrazeny na grafu (obrázek 7.2), na kterém je rozdíl patrnější. Vidět jsou i poněkud odlišné průběhy vzestupu hodnot u jednotlivých případech.

Tabulka 7.2 Odhad pravděpodobnosti započení koroze $P_{f,t}$ [%]

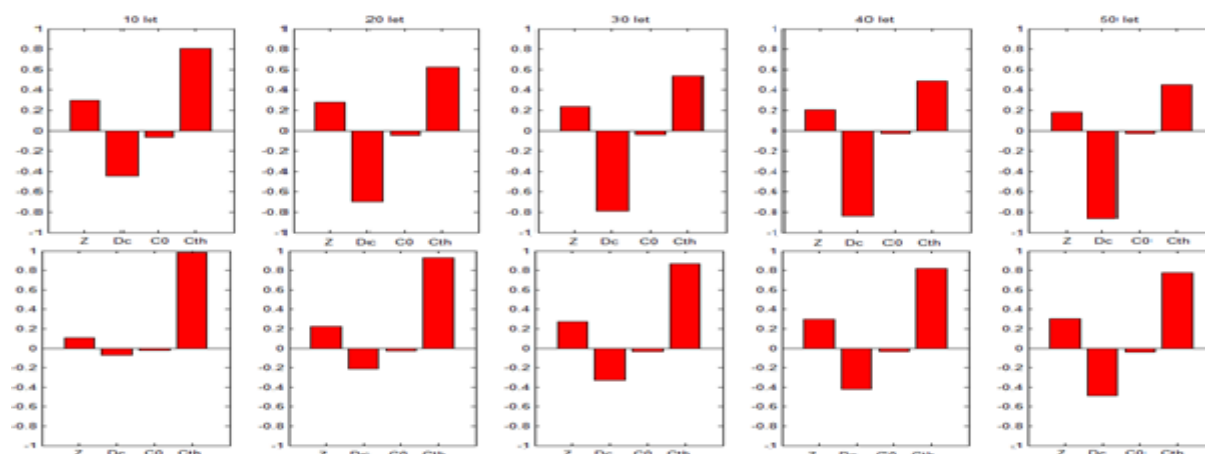
Roky	10	20	30	40	50
Příklad A1	9,62	29,91	41,70	49,11	54,07
Příklad A2	0,27	1,79	4,52	8,15	11,96
Příklad B1	0,85	8,68	18,97	28,08	35,08
Příklad B2	0,00	0,00	0,01	0,04	0,07



Obr. 7.2 Grafické zobrazení odhadu pravděpodobnosti započení koroze $P_{f,t}$

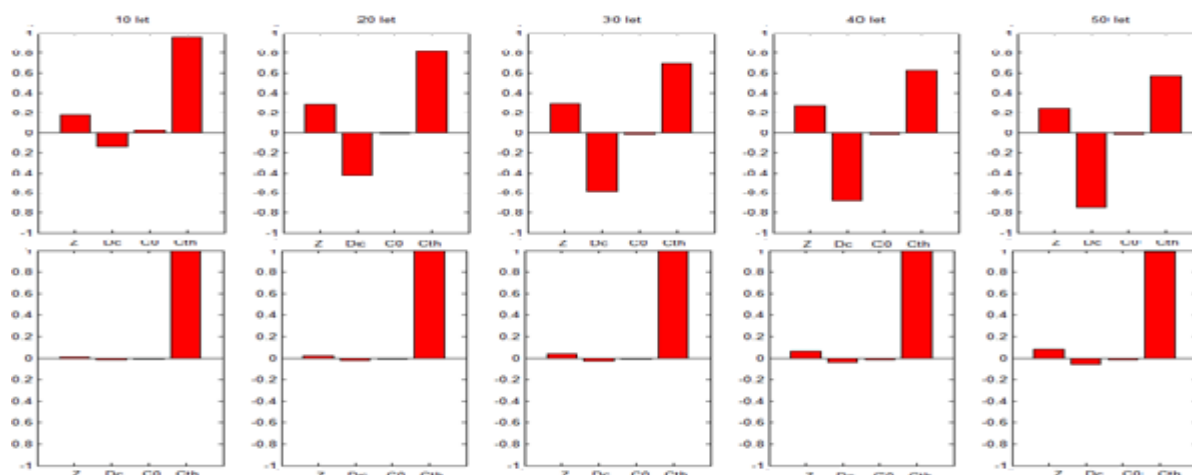
7.2. Porovnání v rámci citlivostní analýzy

Podobně zajímavé výsledky vykazovaly i porovnání citlivostních analýz mezi všemi úlohami. Nejdříve se podívejme na rozdíly mezi příklady A1 a A2 (obrázek 7.2), tedy se stejnou počáteční hodnotou difuzního součinitele. Zopakujme, že rozdíl je v přístupu k zadávání parametru, když u příkladu A1 je součinitel stále stejný, ale u příkladu A2 se zvětšuje v čase.



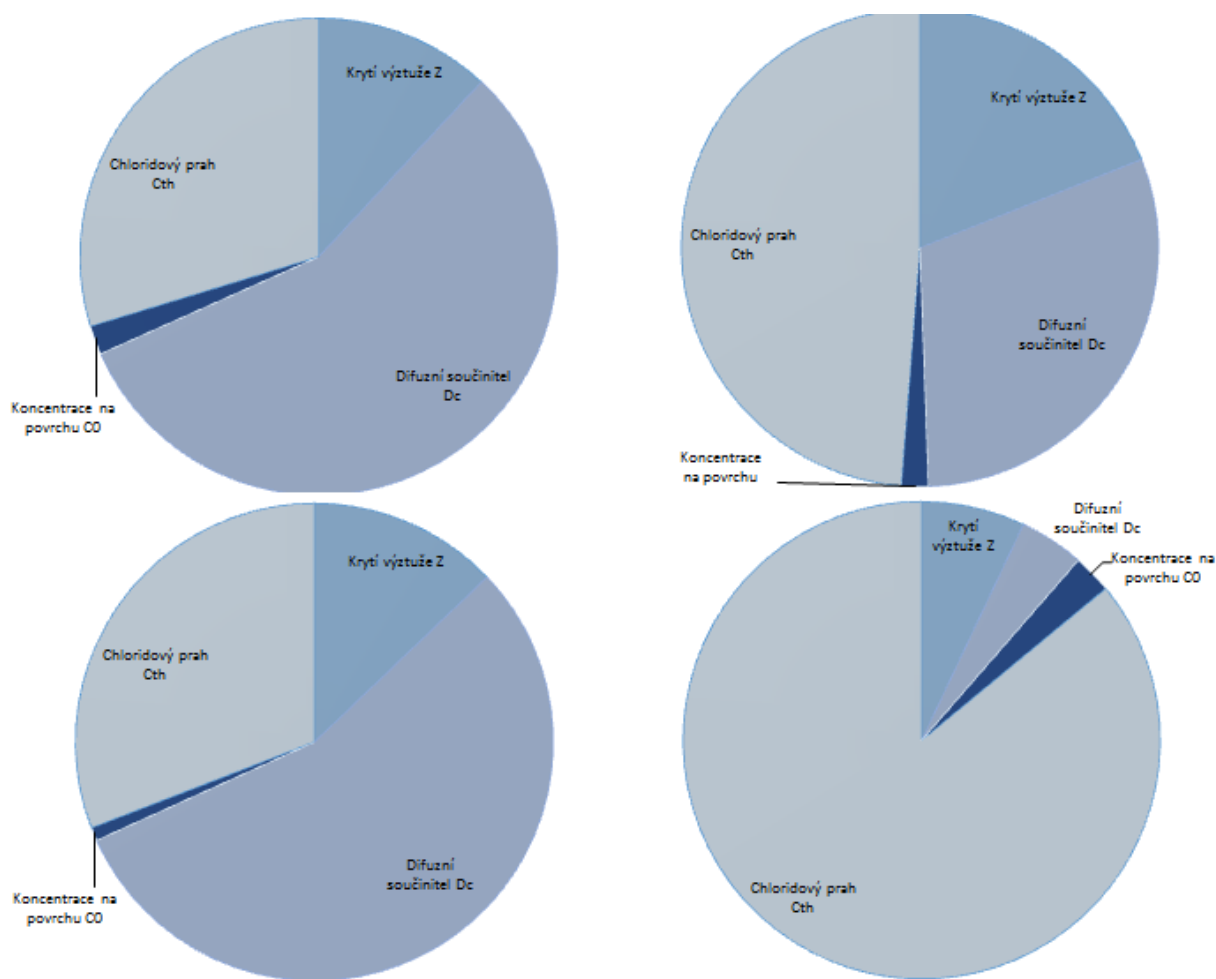
Obr. 7.3 Výsledky citlivostní analýzy příkladu A1 (konstantní D_c , nahoře) a A2 (časově závislý D_c)

U příkladu A2 je na rozdíl od příkladu A1 vliv difuzního součinitele D_c na funkci spolehlivosti při začátku působení chloridů prakticky stejně zanedbatelný jako koncentrace na povrchu C_0 . Postupem času jeho vliv narůstá stejně, jako je uvedeno v kapitole 6.2, ale chloridový práh C_{th} má stále vedoucí úlohu. Ještě markantnější rozdíl je vidět na obrázku 7.4, kde jsou porovnávány výsledky součinitelů korelace pro příklady B1 a B2.



Obr. 7.4 Výsledky citlivostní analýzy příkladu B1 (konstantní D_c , nahoře) a B2 (časově závislý D_c)

Právě obrázek 7.4 ukazuje, že při aplikaci časově závislého difuzního součinitele do výpočtu a uvažování s vysokopevnostním betonem, je jeho vliv na pravděpodobnostní posudek s ohledem na změnu v čase téměř nulový. To je způsobeno jeho rychle se snižující hodnotou v čase. Naopak vedoucí vliv při určení pravděpodobnosti vzniku koroze přebírá koncentrační prahu C_{th} . Rozdíly mezi všemi čtyřmi příklady jsou pro úplnost zobrazeny na obrázku 7.5.



Obr. 7.5 Porovnání míry vlivu jednotlivých posuzovaných parametrů v čase 50 let po začátku působení chloridových iontů - A1 (vlevo nahoře), A2 (vpravo nahoře), B1 (vlevo dole), B2 (vpravo dole)

I tento graf dokazuje, že jednotlivé úlohy vykazují odlišné hodnoty vlivů popisovaných parametrů na funkci spolehlivosti RF_t . Ta má u příkladů A1 a B1 s konstantním difuzním součinitelem relativně podobnou závislost na všech parametrech, naopak příklady A2 a B2 se výrazně liší.

8. Souhrn

Základním tématem diplomové práce je pravděpodobnostní analýza časově závislého difuzního problému. Její opodstatnění spočívá v aktuální potřebě řešení konstrukčních problémů s ohledem na udržitelnost a finanční stránku. Výstupem práce je funkční algoritmus 2D MKP difuzního modelu zohledňující vliv času na vývoj hodnoty difuzního součinitele. Součástí je i algoritmus pravděpodobnostní analýzy daného problému. V úvodu jsou podrobně popsány důvody a opodstatnění diplomové práce. Také jsou zevrubně nastíněny jednotlivé části problematiky difuze, časově závislého difuzního koeficientu, metody konečných prvků a izoparametrického konečného prvku. Poslední část úvodní kapitoly se zabývá popisem aktuálního stavu výzkumu a možné návaznosti na něj.

Následně jsou stanoveny cíle a stručně popsány části diplomové práce. Předně jde o již zmíněnou pravděpodobnostní analýzu. Dalším úkolem práce je připravení algoritmu pro řešení difuze metodou konečných prvků s ohledem na časově závislý difuzní parametr. Práce si bere za cíl správné pochopení zmíněného vlivu časově závislého difuzního koeficientu a stanovení rozdílů při užití konstantního parametru. Vzhledem k tomu, že práce navazuje na bakalářskou práci *Numerické řešení 2D difuze chloridů pomocí MKP* [16], je navrženo využití jiného izoparametrického prvku, než byl původně odvozený trojúhelníkový lineární prvek. Součástí procesu je pokus o odvození čtyřuzlového izoparametrického prvku. Je nutno říct, že celý proces byl časově náročný, a i když se dostal do fáze implementovaného algoritmu, dosažené výsledky nenaplnily očekávání. V příloze A je popsán postup odvození čtyřuzlového izoparametrického prvku, který může být při následném nalezení nedostatků užít v budoucnu. Pro kompletnost práce jsou uvedeny základní informace o zvoleném trojúhelníkovém prvku převzaté z bakalářské práce [16]. Kapitola 3 také obsahuje kontrolní příklad, který slouží jako ukázka funkčnosti původního algoritmu [16]. Tento program slouží k výpočtu konkrétní hodnoty koncentrace chloridových iontů na libovolném místě konstrukce a v libovolném čase.

Diplomová práce se dále soustřeďuje na využití časově závislého difuzního součinitele. Ten v difuzní úloze vystupuje jako jediná materiálová charakteristika, a proto může mít významný vliv na výsledky výpočtů. V kapitole 4 věnující se tomuto problému je nastíněn difuzní proces a jsou uvedeny rovnice popisující časovou závislost v manuálu programu Life-365 [2]. Nejdříve je

popsán vytvořený algoritmus, který je určený pro kontrolu správného pochopení daných vzorců a celé problematiky. Výsledky jsou porovnány s laboratorními měřeními [7]. Vzhledem k tomu, že podobnost výsledků je na uspokojivé úrovni, přechází práce k samotné aplikaci a implementace algoritmu do původního programu [16]. Do nově upraveného programu jsou zavedeny vstupní hodnoty kontrolního příkladu a výsledky výpočtu jsou porovnány s modelem v komerčním softwaru Ansys [1]. I zde je úroveň schody na dostatečné úrovni, a proto práce pokračuje k další pravděpodobnostní analýze.

Poslední fáze diplomové práce se zabývá přípravou algoritmu sloužícího pro odhad pravděpodobnosti inicializace korozního procesu v místě na okraji výztuže železobetonové mostovky. Analýza je založena na metodě SBRA [17]. Páteční algoritmus nazvaný zkráceně *PASVIK* je vytvořen způsobem, který umožňuje zadávat do difuzní úlohy různé parametry modelu a také vstupní hodnoty formou useknutých histogramů. Jejich distribuční funkce jsou následně využity při zadávání náhodně proměnných parametrů. Celá kapitola popisuje zmíněný hlavní algoritmus i funkce, které bylo nutno pro daný problém vytvořit. Výše popisovaný algoritmus, který určuje koncentraci chloridových iontů je v rámci práce převeden na funkci, kterou *PASVIK* využívá.

9. Závěry

Výstupem diplomové práce je pravděpodobnostní analýza 1D difuze chloridů k nechráněné ocelové výztuži v železobetonové mostovce. Analýza porovnává vliv časově závislého difuzního součinitele na iniciaci koroze u vzorků běžného a vysokohodnotného betonu. Je podrobně popsán jeden ze zvolených příkladů a ukazují se možné výstupy vytvořeného programu. Prvním z nich je hodnota pravděpodobnosti započetí koroze výztuže v čase $P_{f(t)}$. Hodnoty vypočtené programem vycházejí dle zadaných parametrů podle očekávání. Dále je na příkladu proveden rozbor funkce spolehlivosti pomocí citlivostní analýzy a jsou stanoveny nejvlivnější parametry. V tomto případě jde o difuzní součinitel, který má s funkcí spolehlivosti nepřímou souvislost. Naopak hodnota chloridového prahu má na výsledné hodnoty vliv v přímé úměře. Zde je nutno podotknout, že u příkladů s časově závislým difuzním součinitelem se jeho vliv na funkci spolehlivosti rapidně snižuje. Míru pravděpodobnosti vzniku koroze následně ovlivňují převážně nízké hodnoty chloridového prahu. Dále je třeba zmínit, že samotné výsledky nemusí mít přímou vypovídající hodnotou ve smyslu reálné pravděpodobnosti iniciace koroze vzhledem k přijatým zjednodušením a předpokladům. Výsledky tedy slouží spíše jako parametr pro porovnání s jinými zadáními.

Práce v další části poukazuje na rozdíly při odlišném způsobu v přístupu k difuznímu součiniteli. Je zde provedena pravděpodobnostní analýza všech úloh a výsledky jsou porovnány pomocí zmíněných výstupů. Prvním údajem je průměrná hodnota koncentrace chloridových iontů ve stejném čase a místě. Ukazuje se, že příklady s konstantním difuzním součinitelem vykazují poměrně vyšší hodnoty než příklady s parametrem časově závislým. Stejně tak porovnání mezi klasickým betonem reprezentovaným směsí s portlandským cementem a vysokopevnostním betonem s příměsí strusky a popílku prokazuje lepší chování druhého betonu. Ve stejném duchu se ukazuje i porovnání hodnot pravděpodobnosti započetí koroze v několika časových obdobích. Jak z tabulkového souhrnu, tak z grafického výstupu vyplývají stejné poznatky, jako v přechodném příkladu. Zajímavá je i citlivostní analýza všech úloh a znázornění porovnání v čase 50 let od počátku působení chloridů.

Diplomová práce poukazuje na rozdílné chování 2D MKP modelu difuze chloridových iontů při zohlednění konstantního nebo časově závislého difuzního součinitele s ohledem na iniciaci koroze. Stejně tak se prokazují rozdíly v případě uvažování s vysokopevnostním betonem. Další práce v oblasti problematiky modelování trvanlivosti železobetonových konstrukcí je žádoucí, a

to jak s ohledem na zhodnocení vlivu rozdílných betonových směsí na riziko iniciace koroze, tak i s ohledem na propagaci koroze a modelování vlivu expanze korozních produktů na tvorbu korozní trhliny. Stejnou váhu má optimalizace výpočetního algoritmu pro pravděpodobnostní posudek a hlubší analýza všech vstupních parametrů. Rozšíření výzkumu problematiky a zpřesnění popisu degradačních procesů včetně porovnání s fyzikálními experimenty může být užitečným nástrojem stavebních inženýrů pro trvanlivější a ekonomicky přívětivější návrh železobetonových konstrukcí.

10. Seznam použitých pramenů a literatury

- [1]. Ansys 14.0, Release Documentation dostupné na: <<http://www.ansys.com>>, 2013.
- [2]. BENTZ, E. a THOMAS, M.D.A. *Life-365 Service Life Prediction Model*. Computer Program for Predicting the Service Life and Live-Cycle Costs of Reinforced Concrete Exposed of Chlorides, 2001.
- [3]. BRADÁČ, J. a MAREK, P. *Application of Simulation-based Reliability Assessment, SBRA, for Lifetime Prediction of Concrete Structures*. Bratislava : 8th International Conference on Life Prediction and Aging Management of Concrete Structures, 1999.
- [4]. BROŽOVSKÝ, J. *uFem Finite element method program*. Ostrava : dostupné na: <http://fast10.vsb.cz/brozovsky/ufem/_en.html>, 2010.
- [5]. BROŽOVSKÝ, J. a MATERNA, A. *Metoda konečných prvků ve stavební mechanice*. Ostrava : dostupné online: <<http://mi21.vsb.cz/modul/metoda-konecnych-prvku-ve-stavebni-mechanice>>, 2011.
- [6]. ČERMÁK, L. *Algoritmy metody konečných prvků*. Brno : Studijní text VUT Brno, Fakulta Strojní, 2010.
- [7]. GHOSH, P. a TRAN, Q. *Long Term Variation and Correlation between Bulk and Surface Resistivity for Different Cementitious mixtures*. Washington D.C. : Transportation Research Board, 2014.
- [8]. GHOSH, P., a další, a další. *Influence of HPC mixtures on diffusion coefficients, resistivity and surface chloride*. Norway : International Congress on Durability of Concrete, Paper: ICDC2012-D-11-00059R3, 2010.
- [9]. JANAS, P., KREJSA, M. a KREJSA, V. *Reliability, risk and safety: theory and applications : proceedings of the European Safety and Reliability Conference*. ESREL, Prague, Czech Republic : Editor Radim Briš, C Soares, Sebastián Martorell Alsina. Leiden: CRC Press, 2010, 3 sv. (xxxiv, 2367 s.). ISBN 978-0-415-55509-8., 2009.

- [10]. KONEČNÝ, P. *Posouzení spolehlivosti železobetonové mostovky s ohledem k působení chloridů*. Ostrava : Doktorská dizertační práce, Fakulta Stavební, VŠB-TUO, 2007.
- [11]. KONEČNÝ, P., BROŽOVSKÝ, J. a GHOSH, P. *Využití programu Korozeeneck k modelování vlivu chloridů na vznik trhliny v železobetonu*. Ostrava : Modelování v mechanice, ISBN 978-80-248-2384-3, 2011.
- [12]. KONEČNÝ, P., GHOSH, P. a LEHNER, P. *Uvážení časově závislého difuzního součinitele při modelování difuze chloridů v betonu*. Ostrava, Czech Republic : Modelování v mechanice 2013 : sborník příspěvků vědecké konference : 22. a 23. května 2013, VŠB - Technická univerzita, s. 1-7. 978-80-248-2985-2, 2013.
- [13]. KONEČNÝ, P., GHOSH, P. a TIKALSKY, P.J. *Stochastic Estimation of Corrosion Propagation Time for HPC Mixture*. Praha : In Advances in Concrete Technology and Sustainability Issues: 12th International Conference on Recent Advances in Concrete Technology and Sustainability. , 2012, .
- [14]. KREJSA, M. a KONEČNÝ, P. *Spolehlivost a bezpečnost staveb*. Ostrava : dostupné na: <http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/spolehlivost_obr.pdf>, 2012.
- [15]. KURGAN, G. J. *Comparison of Chloride Penetrability, Porosity, and Resistivity for High Performance Concrete*. Pennsylvania : Master of Science Thesis, Department of Civil and Environmental Engineering, Pennsylvania State University, State College, U.S.A., 2003.
- [16]. LEHNER, P. *Numerické řešení 2D difuze chloridů užitím MKP*. Ostrava : Bakalářská práce, Fakulta Stavební, VŠB-TUO, 2012.
- [17]. MAREK, P., a další, a další. *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo simulation. Basics, Exercises Software*. Prague, Czech Republic : ITAM Academy of Sciences, ISBN 80-86246-19-1, 2003.
- [18]. MAREK, P., GUŠTÁR, M. a PERMAUL, K. *Simulation-Based Reliability Assessment for Structural Engineers*. Florida : CRC Press, 1995. Sv. ISBN: 0-8493-8286-6.

[19]. MATESOVÁ, D., PERNICA, F. a TEPLÝ, B. *Limit States for Durability Design - Modelling and the Time Format*. Ostrava : Sborník konference Modelování v Mechanice, 2006.

[20]. MatLab a MatLab, 7.10.0.854. 2010. místo neznámé : numerical computing environment, developed by MathWorks.

[21]. PRAKS, P. *Numerical aspects of Simulation Based Reliability Assesment of Systems*. Praha : Institue of Theoretival and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, ISBN 80-86245-17-5, 2002.

[22]. PYC, W. *Field performance of epoxy-coated reinforcing steel in Virginia bridge decks*. Virginia, U.S.A : Doctoral dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University,, 1998.

[23]. SOHANGHPURWALA a SCANNELL, W.T. “*Verification of Effectiveness of Epoxy-Coated Rebars*“. Final Report to Pennsylvania Department of Transportation, Project No. 94-005, 1994.

[24]. TEPLÝ, B., a další, a další. *Durability vs. Reliability of RC structures*. Lyon : Internationa Conference on Durability of Building Materials and Components, 2005.

[25]. TEPLÝ, B., a další, a další. *Deterioration of reinforced concrete: Probabilistic and sensitivity analyses*. Praha : Acta Polytechnica, 1999.

[26]. TIKALSKY, P.J., PUSTKA, D. a MAREK, P. *Variations in Chloride Diffusion in Concrete*. ACI Structural Journal, vol. 102, is.3, pp:481-486, 2005.

[27]. TIKALSKY, P.J., SCHOKKER, A.J. a TEPKE, D.G. *Potential Concrete Mixture Design for the I-99 Corridor*. Pennsylvania : PTI Report, Sponzored by The Pennsylvania Department of Trasportation, 2003.

[28]. VOŘECHOVSKÁ, D., a další, a další. *Modelling of Chloride Concentration Effect of Reinforcement Corrosion*. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 24, 446-458., 2009.

[29]. VOŘECHOVSKÝ, M. a NOVÁK, D. *Correlation control in small-sample Monte Carlo type simulations I: A simulated annealing approach*. Probabilistic Engineering Mechanics, ISSN 0266-8920, 2009.

[30]. Wikipedia. *Gaussian quadrature*, dostupné na:
<http://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature>.

[31]. Wikipedia. *Metoda nejmenších čtverců*, dostupné na:
<http://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_nejmen%C5%A1%C3%ADch_%C4%8Dtverc%C5%AF>.

11. Přílohy

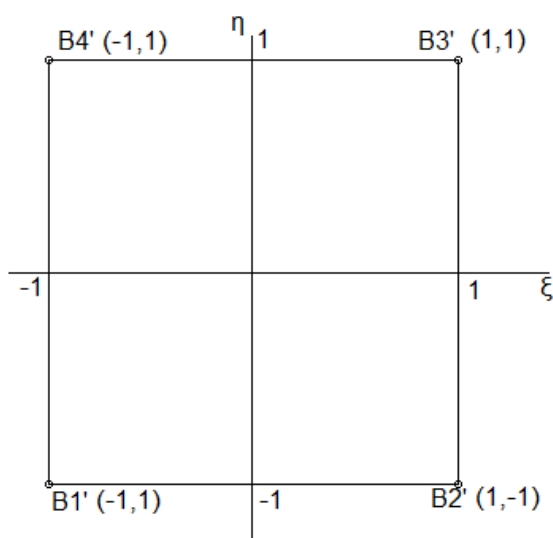
Seznam příloh

- A. Odvození čtyřuzlového prvku a ukázka zdrojového kódu algoritmu 59
- B. CD ROM s výpočetními programy, zdrojovými kódy, vstupními daty a grafickými výstupy ve standardním rozlišení

A. Odvození čtyřuzlového prvku a ukázka zdrojového kódu algoritmu

V první fázi práce bylo uvažováno s využitím jiného izoparametrického prvku, konkrétně čtyřuzlového prvku BC4. V podkapitole 3.4 Výběr prvku jsou uvedeny důvody, proč nebyl prvek využit při pravděpodobnostní analýze, ale pro úplný popis je v této příloze uvedeno odvození prvku BC4 pro difuzní problém. Nutno dodat, že odvození proběhlo ve spolupráci s doc. Ing. Jiřím Brožovským, Ph.D., ale výsledky implementovaného algoritmu bohužel nevykazovaly očekávané hodnoty. Následující popis a zdrojový kód algoritmu může sloužit jako první stupeň pro další výzkum difuze.

Čtyřuzlový izoparametrický prvek BC4 strany přímé a je k němu přiřazen referenční prvek, který má tvar čtverce a je uveden na obrázku 10.1. Na tomto referenčním prvku se definují bazové funkce N .



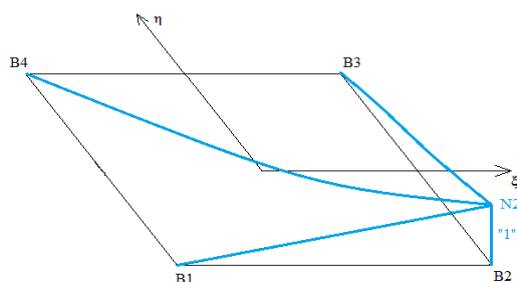
Obr. 11.1 Referenční prvek bilineárního čtyřuzlového izoparametrického prvku

Pro čtyřuzlový prvek jsou zapotřebí čtyři tvarové funkce dle těchto vzorců [6]:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), & N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta), & N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta), \end{aligned} \quad /11.1/$$

Jednotlivé funkce N_1 , N_2 , N_3 a N_4 ze vzorce /11.1/ odpovídají konkrétním vrcholům čtyřuzlového referenčního prvku. Jako příklad si uveďme grafické zobrazení jedné z funkcí na

obrázku 11.2, která nad svým referenčním bodem nabývá hodnoty 1 a na ostatních bodech hodnoty 0:



Obr. 11.2 Tvarová funkce N_2 na referenčním čtverci

Přejdeme k vlastnímu odvození prvku pro difuzní problém. V této úloze jsou neznámými veličinami koncentrace chloridových iontů na jednotlivých uzlech. Při pohledu na teplotně-difuzní analogii lze říct, že koncentrace odpovídají teplotám u úlohy nestacionárního vedení tepla. Vzhledem k tomu, že tato podobnost byla již popsána v předchozí práci [16], byl izoparametrický konečný prvek odvozován rovnou s konkrétními parametry difuzní úlohy.

Nejdříve bylo nutno vyjádřit koncentrace C pomocí aproximačních funkcí:

$$C = N_1 C_1 + N_2 C_2 + N_3 C_3 + N_4 C_4, \quad /11.2/$$

kde N_i jsou funkce popsané ve vzorcích /11.1/ a C_i jsou hledané koncentrace v jednotlivých uzlech. Maticově lze výraz /11.2/ zapsat takto:

$$\{C\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}. \quad /11.3/$$

Následně bylo možno využít analogii s deformační úlohou, ve které vystupují geometrické rovnice [5], a odvodit rovnici:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_c & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^T \{C\}, \quad /11.4/$$

kde D_c je difuzní součinitel betonu [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$].

Dosazením za vzorce /11.3/ do /11.4/ jsme získali:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_C & 0 \\ 0 & D_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}, \quad /11.5/$$

a následným rozepsáním derivací v rovnici /11.5/ jsem získali jednotlivé členy zobrazené maticově takto:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_C & 0 \\ 0 & D_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}, \quad /11.6/$$

Vzhledem k tomu, že se zde vyskytují členy $\frac{\partial}{\partial x}$ a $\frac{\partial}{\partial z}$, ale N_i jsou funkcemi ξ , η , je třeba využít vztahy pro derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad /11.7/$$

které vypadají v maticové podobě takto:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = |J| \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad /11.8/$$

V rovnici /3.8/ se poprvé vyskytuje Jakobian J, který slouží pro transformaci mezi souřadnicovými systémy, a za jeho pomoci můžeme vyjádřit konkrétní derivace. Jakobian J má tvar matice dva krát dva a jeho jednotlivé členy mají tyto rovnice:

$$J_{11} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4, J_{12} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} z_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} z_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} z_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} z_4,$$

$$J_{21} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4, J_{22} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} z_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} z_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} z_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} z_4 /11.9/$$

Jakobian J potřebujeme jak v původním tvaru:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \quad /11.10/$$

tak ve tvaru inverzním, který po úpravě vypadá takto:

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}, \quad /11.11/$$

kde determinant Jakobianu je vypočten pomocí Sarusova pravidla:

$$\det(J) = J_{11} * J_{22} - J_{12} * J_{21}. \quad /11.12/$$

Původní tvarové funkce /11.1/ se derivují dle uvedených vztahů a vznikne tak matice tvarových funkcí:

$$[N] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 1 - \eta & \eta + 1 & -1 - \eta \\ \xi - 1 & -\xi - 1 & \xi + 1 & 1 - \xi \end{bmatrix}. \quad /11.13/$$

Vztah /3.8/ lze následně napsat ve zjednodušené maticové podobě takto:

$$B = J^{-1} * [N] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}. \quad /11.14/$$

Posledním krokem tzv. analýzy konečného prvku bylo odvození matice vodivosti, která je v klasických úlohách teorie pružnosti analogická k matici tuhosti, a proto je označována písmenem K . Pro nelineární difuzní úlohy je navíc třeba odvodit i matici kapacity C . V práci *Numerické řešení 2D difuze chloridů pomocí MKP* [16], byly obě matice odvozeny pro pravoúhlý trojúhelníkový prvek a měli tento tvar:

$$K = \int_V B^T D_c B dV = AB^T D_c B, \quad /11.15/$$

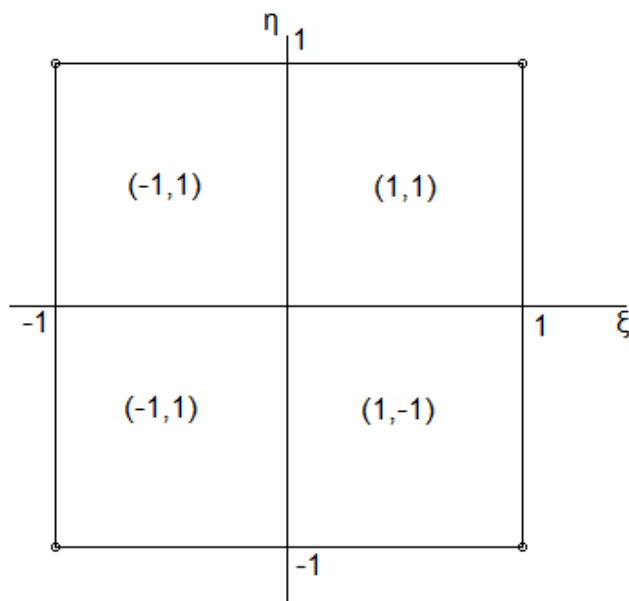
$$C = \int_V N^T N dV = AN^T N, \quad /11.16/$$

V případě bilineárního čtyřuzlového izoparametrického prvku bylo možné tyto rovnice převést do jednotkových souřadnic a vznikly hledané vzorce pro matice vodivosti a kapacity:

$$K = \int_V B^T D_c B dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D_c B \det(J) d\xi d\eta, \quad /11.17/$$

$$C = \int_V N^T N dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T N \det(J) d\xi d\eta. \quad /11.18/$$

V obou případech se jedná o určitý integrál, který je nutno konkrétním způsobem vypočítat. S ohledem na jejich typ je vhodné využití aproximace pomocí kvadraturních vzorců. Pro danou úlohu byla zvolena tzv. Gaussova kvadratura [30]. Prvním krokem je rozdělení referenčního konečného prvku na 4 části. Na obrázku 11.3 je jasně vidět, že jde o části rozdělené osami prvku:



Obr. 11.3 Rozdělení referenčního prvku a hodnoty pro kořeny.

Pro každou z částí prvku jsou předem určeny hodnoty kořenu, který je potřebný ve výpočtu.

U Gaussovy kvadratury se využívají vzorce podle počtu bodů na daném integrovaném polynomu a v našem případě je počet bodů roven dvěma, takže je využita pro kořeny hodnota uvedená zde [30]:

$$x_i = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad /11.19/$$

Do algoritmu tyto kořeny vstupují přes matici tvarových funkcí uvedenou ve výrazu /11.13/:

$$[N] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 1 - \eta & \eta + 1 & -1 - \eta \\ \xi - 1 & -\xi - 1 & \xi + 1 & 1 - \xi \end{bmatrix}, \quad /11.20/$$

Pokud se podíváme na obrázek 11.3, můžeme uvažovat spodní levou čtvrtinu za první výpočetní prvek a další prvky značit v pořadí proti směru hodinových ručiček. Z toho plyne, že konstanty ξ , η nabývají pro jednotlivé části prvku hodnot uvedených v tabulce 11.1.

Tabulka 11.1 Hodnoty kořenů Gaussovy kvadratury pro danou úlohu

Číslo části	ξ	η
1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
2	$+\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
3	$+\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\frac{\sqrt{3}}{3}$
4	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tyto hodnoty jsou v cyklu zaváděny do matice tvarových funkcí, ze které se následně počítají další parametry prvku. Zjednodušeně se dá říct, že výpočet matice vodivosti K a kapacity C je prováděn postupně proti směru hodinových ručiček na jednotlivých čtvrtinách prvku a výsledné hodnoty jsou sčítány.

Je nutno dodat, že do výpočetní části algoritmu bylo nutno přidat všechny potřebné vzorce a výrazy. Pro výpočet byly využity vzorce související s výpočtem Jakobianu J (/11.9/, /11.10/, /11.11/, /11.12/), matice tvarových funkcí N (/11.13/) a gradientů těchto funkcí B (/11.14/). V neposlední řadě do výpočtu vstoupily rovnice pro matice vodivosti K (/11.17/) a kapacity C (/11.18/).

Konkrétní popisovaná část zdrojového kódu z programovacího prostředí MatLab je uvedena v tabulce 11.2. Je zde uveden doslovný přepis kódu s konkrétními rovnicemi a parametry a s textovou legendou, která slouží pro orientaci v programu.

Tabulka 11.2 Přepis části zdrojového kódu

```

...
gauss=(3^(1/2))/3; %HODNOTA KOŘENŮ KVADRATURY
gauss_eta=gauss*[-1 -1 1 1]; %ZNAMÉNKA PRO ETA
gauss_zeta=gauss*[-1 1 1 -1]; %ZNEMÉNKA PRO ZETA
for j=1:4 %ZAČÁTEK CYKLU
    eta=gauss_eta(j); %HODNOTA ETA PRO ČÁST
    zeta=gauss_zeta(j); %HODNOTA ZETA PRO ČÁST
    N(:,:)=0.25*[eta-1 1-eta eta+1 -eta-1;zeta-1 -zeta-1 zeta+1 1-zeta];
    %MATICE TVAROVÝCH FUNKCÍ
    J11=N(1,1)*x1+N(1,2)*x2+N(1,3)*x3+N(1,4)*x4; %PRVNÍ ČLEN JAKOBIANU
    J12=N(1,1)*z1+N(1,2)*z2+N(1,3)*z3+N(1,4)*z4; %DRUHÝ ČLEN JAKOBIANU
    J21=N(2,1)*x1+N(2,2)*x2+N(2,3)*x3+N(2,4)*x4; %TŘETÍ ČLEN JAKOBIANU
    J22=N(2,1)*z1+N(2,2)*z2+N(2,3)*z3+N(2,4)*z4; %ČTVRTÝ ČLEN JAKOBIANU
    J=[J11 J12;J21 J22]; %JAKOBIAN
    DetJ=J11*J22-J12*J21; %DETERMINANT JAKOBIANU
    JT=[J22 -J12;-J21 J11]; %TRANSPONOVANÝ JAKOBIAN 1
    Jt=(1/DetJ)*JT; %TRANSPONOVANÝ JAKOBIAN 2
    B=Jt*N(:,:); %GRADIENTY TVAROVÝCH FUNKCÍ
    D=[Dth 0;0 Dth]; %PARAMETR DIFUZNÍHO
    SOUČinitele
    Kprvku_ctvrt=B'*D*B*DetJ; %MATICE VODIVOSTI ČÁSTI
    Nt(:,:)=N(:,:); %TRANSPONOVANÁ MATICE
    TVAROVÝCH FUNKCÍ
    Cprvku_ctvrt=Nt(:,:)*N(:,:)*DetJ; %MATICE KAPACITY ČÁSTI
    Kprvku(:,i)=Kprvku(:,i)+Kprvku_ctvrt; %MATICE VODIVOSTI PRVKU
    Cprvku(:,i)=Cprvku(:,i)+Cprvku_ctvrt; %MATICE KAPACITY PRVKU
end %KONEC CYKLU
...

```

U zde popisovaného algoritmu využívajícího čtyřuzlový izoparametrický prvek nebyla prokázána funkčnost a výsledky neodpovídaly očekávaných hodnotám.

Poděkování

Závěrem bych chtěl poděkovat všem lidem, kteří mi byli nápomocní ve všech chvílích přípravy a tvorby diplomové práce. Zvláštní poděkování patří Ing. Petru Konečnému, Ph.D., který mě přivedl k výzkumu difuze chloridů a vedl mě v průběhu celé práce. Jsem mu vděčný za to, jak velkou projevil trpělivost ve chvílích, kdy se mi nedařilo, i za to, že dokázal pochválit ve chvílích dobrých. Dále bych rád zmínil i doc. Ing. Jiřího Brožovského, Ph.D., který věnoval spoustu času zkoumání izoparametrických prvků. Samozřejmě byl nápomocný i v jiných technických věcech souvisejících s diplomovou prací, za což mu patří velký dík. Můj vděk si rozhodně zaslouží i má rodina a přítelkyně.

Je třeba také zmínit, že práce byla realizována za finančního přispění Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR z Operačního programu: OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost (OP VK) v rámci projektu „Tvorba a internacionalizace špičkových vědeckých týmů a zvyšování jejich excelence na Fakultě stavební VŠB-TUO“ projekt č. CZ.1.07/2.3.00/20.0013.